

Esercitazione 2 di Analisi Matematica I

1. Determinare l'estremo superiore (sup) e l'estremo inferiore (inf) dei seguenti insiemi, specificando quando coincidono con punti di massimo e minimo:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}; & B &= \{x \in \mathbb{R} : 27 \leq x^3 < 64\}; \\ C &= \left\{x \in \mathbb{R} : x = 3 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}; & D &= \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}; \\ E &= \{1\} \cup (2, 3] \cup (4, 10); & F &= \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 \leq x^4\} \\ G &= \{x \in \mathbb{R} : x = n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}; & H &= \left\{x \in \mathbb{R} : x = n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}. \end{aligned}$$

2. Individuare dominio e grafico di

$$f(x) = \sqrt[6]{x^4}, \quad g(x) = (\sqrt[6]{x})^4, \quad h(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

3. Determinare il dominio di

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5}}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} - 1\right).$$

4. Determinare dominio e immagine di $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$.
5. Sia $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$; trovare la controimmagine del punto $\{0\}$ e dell'intervallo $[2, +\infty)$.
6. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{se } x = 1/2 \\ 2x - 2 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

e determinarne estremo inferiore, estremo superiore ed eventuali massimo e minimo su $[0, 1]$.

7. Tracciare i grafici di e^{x+2} , $e^x + 2$, $\sin(3x)$, $-3\sin x$, $|e^{3x} - 3|$, $e^{3|x|} - 3$, $|\ln(|x| - 1) - 2|$, $-\ln(|x| - 1) + 2$.
8. Tracciare il grafico delle funzioni $f(x) = |x|$, $g(x) = |x + 1|$, $h(x) = |x - 1|$, $l(x) = |x| + 1$, $m(x) = |x| - 1$.
9. Tracciare il grafico delle funzioni $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2\sin x$, $h(x) = \sin(2x)$, $l(x) = \sin(\frac{x}{2})$, $m(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$.
10. Determinare il dominio e tracciare il grafico della funzione $f(x) = 2 + \ln(x + 3)$.
11. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x|x - 2| + 2x$.
12. Verificare che la funzione $f(x) = 2x - 1$ è biiettiva su \mathbb{R} .
13. Determinare il dominio della funzione $f(x) = 3 + \sqrt{x+1}$ e verificare che sia iniettiva su $\text{dom}(f)$. Trovare l'immagine di f e verificare che f non è suriettiva su \mathbb{R} .
14. Determinare dominio e immagine della funzione $f(x) = 3x+1$. Verificare che f è strettamente monotona su \mathbb{R} . Ricavare l'espressione della funzione inversa f^{-1} e disegnare il grafico di f e f^{-1} .
15. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 9$ non è invertibile. Determinare le restrizioni di f che risultano invertibili.

16. Trovare opportune restrizioni di $f(x) = x^2 - 2|x|$ che siano invertibili. Disegnare i grafici delle funzioni inverse corrispondenti specificandone dominio e immagine.
17. Date le funzioni $f(x) = x - \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, determinare le espressioni delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.
18. Date le funzioni $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = |x|$, determinare il loro dominio e le espressioni delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Disegnare i grafici di $g \circ f$ and $f \circ g$.
19. Date le funzioni $f(x) = 1 + x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, determinare dominio, immagine e intervalli di monotonia. Disegnare il grafico di $g \circ f$.
20. Verificare che $f : x \mapsto x-2$ e $g : x \mapsto -x+3$ sono biiettive. Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ e dimostrare che sono anch'esse biiettive. Verificare inoltre che

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

21. Trovare, se esiste, la funzione inversa di

$$y = f(x) = \arctan \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$

specificandone il dominio.

22. Funzioni pari e dispari. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

$$f(x) = x \sin x, \quad g(x) = \frac{3x}{2-x^2}, \quad h(x) = e^{x^2}, \quad l(x) = \log(x^2 - 1),$$

$$m(x) = x|x|, \quad p(x) = e^{x^3}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

23. Funzioni periodiche. Dire se le seguenti funzioni sono periodiche ed eventualmente esplicitarne il periodo minimo.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x), \quad g(x) = \sin(x^2), \quad h(x) = e^{\tan x},$$

$$l(x) = \sin(3x) + \cos(5x), \quad m(x) = 3 \tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right), \quad p(x) = 3(\cos x)^2.$$

24. Determinare il dominio di $g(x) = \arcsin(2x - \sqrt{x+1})$.

25. Siano

$$f(x) = x^2 + x - 2, \quad g(x) = \log(1 - 2x).$$

Determinare i domini di $g \circ f$ e $f \circ g$.

26. Date le funzioni $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = e^x$, determinare dominio, immagine, intervalli di monotonia. Tracciare il grafico della funzione composta $g \circ f$.

27. Tracciare il grafico delle funzioni $f(x) = \arctan x$, $g(x) = 2 \arctan x$, $h(x) = \arctan(2x)$, $l(x) = \arctan(|x|)$, $m(x) = |\arctan(x)|$.