

CONICHE

ESERCIZI

Esercizio 1. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica \mathcal{C} di equazione

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 32\sqrt{3}x = 0.$$

Calcolare le equazioni di una rototraslazione che riduce \mathcal{C} in forma canonica.

Svolgimento. La matrice della forma quadratica dei termini di secondo grado dell'equazione della conica \mathcal{C} è

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Per determinare forma canonica e rototraslazione dobbiamo calcolare gli autospazi di A . Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 7-t & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 12t + 32 = (t-4)(t-8),$$

quindi gli autovalori di A sono 4 e 8. Per calcolare gli autospazi corrispondenti dobbiamo risolvere i sistemi

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque gli autospazi di A sono $E_A(4) = \mathcal{L}((1, -\sqrt{3}))$, $E_A(8) = \mathcal{L}((\sqrt{3}, 1))$, quindi gli assi del sistema di riferimento canonico sono paralleli ai versori $(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})/2$ e $(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})/2$. Poiché $\vec{i} = (\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})/2 + (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})/2$ e $\vec{j} = (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})/2 - (\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})/2$ hanno già l'orientamento convenzionale essendo la matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonale speciale, possiamo sceglierli come versori del sistema di riferimento canonico.

Siano \hat{x}, \hat{y} le coordinate nel sistema di riferimento $O\hat{x}\hat{y}$. La rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

trasforma l'equazione di \mathcal{C} in

$$4\hat{x}^2 + 8\hat{y}^2 + 16\sqrt{3}\hat{x} + 48\hat{y} = 0$$

Poiché $4(\hat{x}^2 + 4\sqrt{3}\hat{x}) = 4(\hat{x} + 2\sqrt{3})^2 - 48$ e $8(\hat{y}^2 + 6\hat{y}) = 8(\hat{y} + 3)^2 - 72$ la traslazione

$$\begin{cases} x' = \hat{x} + 2\sqrt{3} \\ y' = \hat{y} + 3 \end{cases}$$

trasforma l'equazione di \mathcal{C} in $4x'^2 + 8y'^2 = 120$ ovvero

$$\frac{1}{30}x'^2 + \frac{1}{15}8y'^2 = 1.$$

Perciò, che \mathcal{C} è un'ellisse (reale).

Complessivamente la rototraslazione è

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - 2\sqrt{3} \\ y' - 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\sqrt{3}/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il sistema di riferimento canonico $O'x'y'$ ha perciò origine nel punto avente coordinate $(-5\sqrt{3}/2, 3/2)$ rispetto ad Oxy ed assi paralleli e concordi con i vettori \vec{i}, \vec{j} .

Esercizio 2. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica \mathcal{C} di equazione

$$34x^2 - 24xy + 41y^2 + 40x + 30y = 0.$$

- (1) Determinare una forma canonica di \mathcal{C} individuandone il tipo.
- (2) Calcolare le equazioni di una rototraslazione che riduce \mathcal{C} in tale forma canonica.

Svolgimento. Chiaramente la risposta alla seconda domanda comprende anche la risposta alla prima, quindi il metodo più "economico" per affrontare l'esercizio è quello di rispondere direttamente al secondo quesito.

Qui procederemo invece secondo l'ordine delle domande. Le matrici di \mathcal{C} sono

$$A = \begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 34 & -12 & 20 \\ -12 & 41 & 15 \\ 20 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare $\det(B) = -31250 \neq 0$, dunque \mathcal{C} è non degenera, e $\det(A) = 1250 > 0$, dunque \mathcal{C} è un'ellisse, evidentemente reale poiché $O(0, 0)$ ne soddisfa l'equazione.

Per determinare forma canonica e rototraslazione dobbiamo calcolare gli autospazi di A . Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 34 - t & -12 \\ -12 & 41 - t \end{vmatrix} = t^2 - 75t + 1250 = (t - 25)(t - 50),$$

quindi gli autovalori di A sono 25 e 50. Per calcolare gli autospazi corrispondenti dobbiamo risolvere i sistemi

$$\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque gli autospazi sono $E_A(25) = \mathcal{L}((4, 3))$, $E_A(50) = \mathcal{L}((-3, 4))$, quindi gli assi del sistema di riferimento canonico sono paralleli ai vettori $\vec{i} = (4\vec{i} + 3\vec{j})/5$ e $\vec{j} = (-3\vec{i} + 4\vec{j})/5$. Siano \hat{x}, \hat{y} le coordinate nel sistema di riferimento $O\hat{x}\hat{y}$. La rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

trasforma l'equazione di \mathcal{C} in

$$25\hat{x}^2 + 50\hat{y}^2 + 50\hat{x} = 0$$

Poiché $25(\hat{x}^2 + 2\hat{x}) = 25(\hat{x} + 1)^2 - 25$ la traslazione

$$\begin{cases} x' = \hat{x} + 1 \\ y' = \hat{y} \end{cases}$$

trasforma l'equazione di \mathcal{C} in $25x'^2 + 50y'^2 = 25$. Dividendo ambo i membri per 25 otteniamo perciò

$$x'^2 + 2y'^2 = 1$$

Riotteniamo, perciò, che \mathcal{C} è un'ellisse (reale).

Complessivamente la rototraslazione è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}.$$

Il sistema di riferimento canonico $O'x'y'$ ha perciò origine nel punto avente coordinate $(-4/5, -3/5)$ rispetto ad Oxy ed assi paralleli e concordi con i vettori \vec{i}, \vec{j} .

Esercizio 3. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ di equazione

$$x^2 + 6xy - by^2 - a = 0.$$

- (1) Classificare $\mathcal{C}_{(a,b)}$ al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenera?

Svolgimento. Le matrici associate a $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Risulta $\det(B) = a(b+9)$: quindi $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è degenera se e solo se $(a, b) = (0, b), (a, -9)$. Nel primo caso l'equazione di $\mathcal{C}_{(0,b)}$ diviene

$$x^2 + 6xy - by^2 = (x + 3y)^2 - (9 + b)y^2 = (x + 3y - \sqrt{9 + by})(x + 3y + \sqrt{9 + by}) :$$

in particolare $\mathcal{C}_{(0,b)}$ è una coppia di rette, immaginarie o reali, incidenti se e solo se $b < -9, b > -9$, mentre è una retta doppia se e solo se $b = -9$. Nel secondo caso

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - a = (x + 3y)^2 - a = (x + 3y - \sqrt{a})(x + 3y + \sqrt{a}) :$$

in particolare $\mathcal{C}_{(a,-9)}$ è una coppia di rette, immaginarie o reali, parallele se e solo se $a < 0, a > 0$, mentre è una retta doppia se e solo se $a = 0$. Pertanto l'unico valore di (a, b) per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia doppiamente degenera è $(0, -9)$.

Supponiamo ora $\det(B) = a(b+9) \neq 0$. Si ha $\det(A) = -(9+b)$. $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è una parabola se e solo se $b = -9$: in tal caso risulta essere degenera come già visto, quindi $\mathcal{C}_{(a,b)}$ non è mai una parabola non degenera.

$\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'iperbole se e solo se $b > -9$: quindi $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'iperbole non degenera se e solo se $a \neq 0, b > -9$.

Infine $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'ellisse se e solo se $b < -9$. Per distinguere i valori di (a, b) corrispondenti ad ellissi reali ed immaginarie osserviamo che per $b < -9$ si ha $\text{Tr}(A) = 1 - b > 10 > 0$: in particolare gli autovalori α, β di A sono positivi, sicché una forma canonica di $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = a.$$

Concludiamo che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'ellisse reale non degenera se e solo se $b < -9$ ed $a > 0$, mentre è un'ellisse immaginaria non degenera se e solo se $b < -9$ ed $a < 0$.

Esercizio 4. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la parabola \mathcal{C} con vertice in $V(-2, 2)$, asse parallelo ad $\vec{i} + \vec{j}$ e passante per $P(0, 2)$.

- (1) Determinare l'equazione di \mathcal{C} .
- (2) Determinare una forma canonica di \mathcal{C} .
- (3) Calcolare le equazioni di una rototraslazione che riduce \mathcal{C} in tale forma canonica.

Svolgimento. Per definizione l'asse di \mathcal{C} contiene il vertice, dunque è la retta r d'equazione $x - y + 4$. Ricordiamo che per una parabola il sistema di riferimento canonico $O'x'y'$ ha origine $O' = V$, un asse coincidente con l'asse della parabola stessa, l'altro passante per V .

Nel nostro caso quindi $O'(-2, 2)$. Scegliamo l'asse delle ascisse parallelo ad $\vec{i} + \vec{j}$ ed orientato concordemente. L'asse delle ordinate deve essere allora parallelo e concorde con $-\vec{i} + \vec{j}$. Concludiamo che i versori \vec{i}' , \vec{j}' devono essere paralleli e concordi con i versori

$$\vec{i} = \sqrt{2}(\vec{i}' + \vec{j}')/2, \quad \vec{j} = \sqrt{2}(-\vec{i}' + \vec{j}')/2.$$

In particolare la corrispondente rototraslazione che riduce \mathcal{C} in forma canonica è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

L'equazione di \mathcal{C} nelle nuove coordinate $O'x'y'$ è della forma $y'^2 = 2px'$. Poiché il punto P nel nuovo sistema di riferimento ha coordinate $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ segue che $2p = \sqrt{2}$ ovvero che un'equazione canonica per \mathcal{C} è

$$y'^2 = \sqrt{2}x'.$$

Sostituendo in tale equazione le espressioni che legano x, y ad x', y' si ottiene l'equazione di \mathcal{C} nel sistema di riferimento Oxy , cioè (moltiplicando per 2)

$$x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 10y + 16 = 0.$$

Esercizio 5. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy siano date le rette r ed s rispettivamente di equazione

$$x + 3y - 1 = 0, \quad 3x + y - 3 = 0.$$

- (1) Descrivere la famiglia \mathcal{F} delle iperboli aventi r ed s come asintoti.
- (2) Determinare in \mathcal{F} tutte le iperboli degeneri.
- (3) Ridurre a forma canonica l'iperbole \mathcal{C} di \mathcal{F} passante per l'origine.

Svolgimento. L'equazione delle coniche in \mathcal{F} deve essere del tipo

$$(x + 3y - 1)(3x + y - 3) + c = 0$$

ove $c \in \mathbb{R}$, ovvero $p_c(x, y) = 0$ ove $p_c(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 6x - 10y + 3 + c$.

La corrispondente matrice 3×3 è

$$B_c = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 3 + c \end{pmatrix}.$$

Le iperboli degeneri in \mathcal{F} sono tutte e sole quelle per cui $\det(B_c) = 0$: in particolare deve essere $-16c = 0$, sicché l'unica conica degenera in \mathcal{F} è quella corrispondente al valore $c = 0$ cioè quella di equazione

$$(x + 3y - 1)(3x + y - 3) = 0.$$

Affinché una conica di \mathcal{F} passi per l'origine $O(0, 0)$ deve essere $p_c(0, 0) = 0$, cioè $c = -3$: dunque \mathcal{C} ha equazione

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 6x - 10y = 0.$$

Non è richiesto di individuare la rototraslazione che riduce tale conica \mathcal{C} a forma canonica ma solo la forma canonica stessa. Possiamo perciò procedere come segue.

Innanzitutto calcoliamo gli autovalori della matrice A_{-3} . Il suo polinomio caratteristico è

$$P_{A_{-3}}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 5 \\ 5 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t - 16 = (t-8)(t+2).$$

Quindi una forma canonica di \mathcal{C} è del tipo $8x'^2 - 2y'^2 = \gamma$.

Per individuare γ osserviamo che $\det(A_{-3}) = -16$, $\det(B_{-3}) = -48$, sicché $\gamma = -\det(B_{-3})/\det(A_{-3}) = -3$. Pertanto una forma canonica di \mathcal{C} è

$$\frac{2}{3}y'^2 - \frac{8}{3}x'^2 = 1.$$

Esercizio 6. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica \mathcal{C}_h avente matrice

$$B_h = \begin{pmatrix} 3 & h & 0 \\ h & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

- (1) Classificare \mathcal{C}_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
- (2) Determinare una forma canonica di \mathcal{C}_4 .
- (3) Determinare $h \in \mathbb{R}$ tale che \mathcal{C}_h sia un'iperbole con angolo fra gli asintoti pari a $2\pi/3$.

Svolgimento. Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & h \\ h & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice dei termini di secondo grado della conica \mathcal{C}_h . Risulta $\det(A_h) = 15 - h^2$, $\det(B_h) = 3(2h^2 - 31)$. Quindi \mathcal{C}_h è degenere se e solo se $h = \pm\sqrt{31/2}$: per tali valori di h risulta $\det(A_h) < 0$, quindi \mathcal{C}_h è una coppia di rette reali ed incidenti (determinarne le equazioni).

Supponiamo ora $h \neq \pm\sqrt{31/2}$. Se $h = \pm\sqrt{15}$ chiaramente \mathcal{C}_h è una parabola (non degenere). Supponiamo $|h| > \sqrt{15}$: in questo caso \mathcal{C}_h è un'iperbole (non degenere).

Consideriamo ora il caso $|h| < \sqrt{15}$: in questo caso \mathcal{C}_h è un'ellisse (non degenere) e possiamo voler determinare i valori di h per cui è reale e quelli per cui è immaginaria. Si noti che $\text{Tr}(A_h) = 15$, quindi i suoi autovalori sono positivi. Poiché $\det(B_h) < 0$ per $|h| < \sqrt{15}$ segue che una forma canonica di \mathcal{C}_h è del tipo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

con $\alpha, \beta, \gamma > 0$: concludiamo che \mathcal{C}_h è un'ellisse reale per ogni $|h| < \sqrt{15}$.

Passiamo ora al secondo quesito. Sappiamo già che \mathcal{C}_4 è un'iperbole (non degenere). Inoltre il polinomio caratteristico di A_4 è

$$p_{A_4}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ 4 & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 8t - 1 = (t - 4 - \sqrt{17})(t - 4 + \sqrt{17}).$$

Inoltre $\det(A_4) = -1$, $\det(B_4) = 3$, sicché una forma canonica di \mathcal{C}_4 è

$$(\sqrt{17} + 4)x^2 - (\sqrt{17} - 4)y^2 = 3.$$

Concludiamo con il terzo quesito. Se l'equazione canonica \mathcal{C}_h è

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

con α e β discordi gli asintoti sono individuati dal polinomio $\alpha x^2 + \beta y^2$: in particolare essi sono $y = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}x$. D'altra parte $\pm\sqrt{-\alpha/\beta}$ è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dall'asintoto con il semiasse positivo delle ascisse misurato in verso antiorario: poiché l'asse delle ascisse del sistema di riferimento canonico è mediana dell'angolo formato dagli asintoti si deve avere $\sqrt{-\alpha/\beta} = \tan \pi/3 = \sqrt{3}$. Il polinomio caratteristico di A_h è

$$p_{A_h}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & h \\ h & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 8t + 15 - h^2 = (t - 4 - \sqrt{1+h^2})(t - 4 + \sqrt{1+h^2}).$$

Perché \mathcal{C}_h sia un'iperbole abbiamo visto che deve essere $|h| > \sqrt{15}$: allora per i due autovalori di A_h vale $4 + \sqrt{1+h^2} > 0$, $4 - \sqrt{1+h^2} < 0$. Quindi i valori di h cercati devono soddisfare

$$\frac{4 + \sqrt{1+h^2}}{-4 + \sqrt{1+h^2}} = 3 :$$

risulta perciò $h = \pm 3\sqrt{7}$ (si noti che per entrambi questi valori \mathcal{C}_h è non degenere).

QUIZ

Quiz 1. Sia data la forma quadratica $q(x, y) = 2x^2 + 8xy + 7y^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) q è definita positiva.
- b) q è definita negativa.
- c) q è semidefinita.
- d) q è indefinita.

Svolgimento. Come è noto si può procedere in diversi modi.

Un primo metodo è quello di formazione dei quadrati: poiché

$$2x^2 + 8xy + 7y^2 = 2(x^2 + 4xy) + 7y^2 = 2(x + 2y)^2 - 8y^2 + 7y^2 = 2(x + 2y)^2 - y^2$$

segue che se, per esempio $x + 2y > 0$ e $y = 0$ allora $q(x, y) > 0$, mentre se $x + 2y = 0$ e $y > 0$ allora $q(x, y) < 0$, dunque q risulta essere indefinita.

Un secondo metodo è quello delle operazioni elementari: la matrice (simmetrica) della forma quadratica q è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},$$

dunque

$$A \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riotteniamo così che q è indefinita.

Un terzo metodo si basa sulla regola di Cartesio: per determinare il segno di q è sufficiente determinare il segno dei suoi autovalori, cioè, essendo A simmetrica, delle radici del suo polinomio caratteristico $p_A(t)$. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 4 \\ 4 & 7-t \end{vmatrix} = t^2 - 9t - 2.$$

Chiaramente $t = 0$ non è radice di $p_A(t)$. Poiché la sequenza $(1, -9, -2)$ presenta una variazione di segno segue che $p_A(t)$ ha una radice positiva ed una negativa: concludiamo che q è indefinita.

Quiz 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) La forma quadratica

$$q(x, y, z) = (x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

è indefinita.

b) Non esistono $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nulli e tali che

$$q(x, y, z) = (x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

c) 1 non è radice del polinomio caratteristico $p_A(t)$ di A .

d) $172/(34 + 11i)$ è radice del polinomio caratteristico $p_A(t)$ di A .

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Per verificarlo calcoliamo la segnatura di q (o il segno degli autovalori di q , che è la stessa cosa per il teorema di Sylvester). Procediamo in due modi diversi. Come primo metodo procediamo con operazioni elementari su righe e colonne da A .

$$\begin{aligned} & A \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - 3C_1/2} \\ & \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1/2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - C_2/2} \\ & \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2/2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In particolare osserviamo che A è definita positiva per il teorema di Sylvester.

Come secondo metodo applichiamo la regola di Cartesio. Per fare ciò calcoliamo il polinomio caratteristico di A . Si ha

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 2 & 3 \\ 2 & 4-t & 4 \\ 3 & 4 & 6-t \end{vmatrix} = -t^3 + 12t^2 - 15t + 4$$

Chiaramente $t = 0$ non è radice di $p_A(t)$. Poiché la sequenza $(-1, 12, -15, 4)$ presenta tre variazioni di segno segue che le tre radici di $p_A(t)$ sono positive: concludiamo che q è definita positiva.

L'affermazione b) è vera. Infatti come abbiamo visto sopra q è definita positiva, sicché $q(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nullo: d'altra parte è evidente che $q(0, 0, 0) = 0$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti

$$p_A(1) = \det(A - I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

L'affermazione d) è falsa. Infatti $172/(34+11i) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (come è facile verificare). Inoltre è noto dalla teoria che le radici del polinomio caratteristico di una matrice simmetrica a coefficienti reali sono tutti numeri reali.

Quiz 3. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica \mathcal{C} d'equazione

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) \mathcal{C} è una parabola.
- b) \mathcal{C} è un'iperbole.
- c) \mathcal{C} è un'ellisse.
- d) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

Svolgimento. Le matrici di \mathcal{C} sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(B) = -16$ segue che \mathcal{C} non è degenere.

Inoltre \mathcal{C} è una parabola, un'iperbole, un'ellisse se e solo se $\det(A) = 0$, $\det(A) < 0$, $\det(A) > 0$ rispettivamente: si verifica facilmente che $\det(A) = 0$, dunque l'affermazione a) è vera, mentre le affermazioni b) e c) sono false. Concludiamo che l'affermazione d) è anch'essa falsa.

Quiz 4. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ una matrice simmetrica ad entrate in \mathbb{Z} tale che $a_{2,2}$ è primo ed $a_{1,2}$ non è suo multiplo, \mathcal{C} una qualsiasi conica avente A come matrice della forma quadratica dei termini di secondo grado. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) \mathcal{C} non è una parabola.
- b) \mathcal{C} non è un'iperbole.
- c) \mathcal{C} non è un'ellisse reale.
- d) \mathcal{C} non è un'ellisse immaginaria.

Svolgimento. L'affermazione a) è vera. Infatti \mathcal{C} è una parabola se e solo se

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 0.$$

Se ciò accadesse allora $a_{1,2}^2 = a_{1,1}a_{2,2}$, quindi $a_{2,2}$ sarebbe un fattore primo di $a_{1,2}^2$, quindi di $a_{1,2}$, in contrasto con l'ipotesi.

Le affermazioni b), c), d) sono false. Infatti sia

$$B_{h,n} = \begin{pmatrix} h & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{Z}$. Poiché $a_{2,2} = 2$ ed $a_{1,2} = 3$ siamo nelle ipotesi date, dunque $B_{h,n}$ rappresenta una conica $\mathcal{C}_{h,n}$ che non è una parabola. Si noti che

$$\begin{vmatrix} h & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2h - 9 = (-1)^n \det(B_{h,n}).$$

In particolare $\mathcal{C}_{h,n}$ è sempre non degenera ed è un'iperbole se $h < 9/2$, è un'ellisse reale se $h > 9/2$ e n è dispari, è un'ellisse immaginaria se $h > 9/2$ e n è pari.

Quiz 5. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy siano dati il punto $C(1, 1)$ e la retta r d'equazione $x + y = 0$. Sia poi \mathcal{C} l'iperbole equilatera avente un asse parallelo ad r , centro in C e passante per O . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) Una tale \mathcal{C} esiste ed ha equazione $xy + x + y = 0$.
- b) Una tale \mathcal{C} non esiste.
- c) Una tale \mathcal{C} esiste ed ha equazione $xy - x - y = 0$.
- d) Una tale \mathcal{C} esiste e non interseca la retta s di equazione $3x - 7y = 0$.

Svolgimento. Un asse di \mathcal{C} è parallelo ad r . Poiché per un'iperbole gli assi sono bisettrici degli angoli formati dagli asintoti, e \mathcal{C} deve essere equilatera, segue che gli asintoti sono paralleli agli assi coordinati. Poiché devono passare per il centro di \mathcal{C} segue che gli asintoti devono avere equazioni $x - 1 = 0$ ed $y - 1 = 0$. In particolare \mathcal{C} deve avere equazione

$$(x - 1)(y - 1) + c = 0$$

per un opportuno $c \in \mathbb{R}$. La costante c deve essere scelta in modo tale che le coordinate di O soddisfino l'equazione. Perciò l'equazione di \mathcal{C} è

$$xy - x - y = 0.$$

Concludiamo che le affermazioni a) e b) sono false, mentre l'affermazione c) è vera. L'affermazione d) è falsa perché sia \mathcal{C} che s passano per il punto O .

Quiz 6. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica \mathcal{C} di equazione

$$x^2 - 4xy + 5y^2 + 18x - 4y + 11 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) Esiste un sistema di riferimento rispetto a cui \mathcal{C} ha equazione

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

- b) \mathcal{C} è un'ellisse immaginaria.
- c) Esiste una traslazione che trasforma l'equazione di \mathcal{C} in

$$x^2 + 17y^2 - 11x + \sqrt{29}y + 3 = 0.$$

item" d)" \mathcal{C} è un'ellisse reale.

Svolgimento. Le affermazioni a), b) e d) equivalgono a domandarsi quale sia una forma canonica di \mathcal{C} . Pertanto procediamo individuandone una.

A tale scopo osserviamo che le matrici di \mathcal{C} sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -2 & 5 & -2 \\ 9 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$A = \begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ -2 & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 1 = (t - 3 - \sqrt{8})(t - 3 + \sqrt{8}).$$

dunque i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 3 - \sqrt{8}$ e $\lambda_2 = 3 + \sqrt{8}$. Risulta poi $\det(A) = 1$, $\det(B) = -326$. Concludiamo che un'equazione canonica per \mathcal{C} è

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = -\det(B)/\det(A),$$

cioè

$$(3 - \sqrt{8})x'^2 + (3 + \sqrt{8})y'^2 = 326.$$

Segue che l'affermazione d) è vera, mentre le affermazioni a) e b) sono false.

Per quanto riguarda c) ogni traslazione ha equazioni della forma

$$\begin{cases} x' = x + u \\ y' = y + v \end{cases}$$

per opportuni $u, v \in \mathbb{R}$. Quindi è chiaro che per ogni scelta di u, v l'equazione della conica traslata avrà sempre coefficiente del monomio $x'y'$ non nullo. Pertanto anche l'affermazione c) è falsa.