Corso di Geometria – Esercizi proposti

CONICHE

1. Classificare le seguenti coniche e disegnarle nello stesso sistema di riferimento:
   (i) $4x^2+y^2=4$, (ii) $4x^2-y^2=0$, (iii) $4x^2-y^2=4$.

2. Per ciascuna delle seguenti coniche, trovare il centro (u,v) e l'equazione che risulta ponendo $x=X+u$, $y=Y+v$:
   (i) $x^2+y^2+x=3$, (ii) $x^2+4y^2-6x+8y=3$,
   (iii) $3y^2-4xy-4x=0$, (iv) $3x^2-xy+2y=9$.

3. Fattorizzare i polinomi t^2+3t+2 e t^2+4t+4. Dedurre che entrambe le coniche $x^2+3xy+2y^2=0$ e $x^2+4xy+4y^2=0$ sono degeneri e disegnarle.

4. Scrivere la matrice simmetrica $A\in\mathbb{R}^{2,2}$ associata alla forma quadratica $f(x,y)$ e trovare i segni degli autovalori di A:
   (i) $f(x,y)=x^2+4xy+3y^2$, (ii) $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2$,
   (iii) $f(x,y)=x^2+4xy+4y^2$, (iv) $f(x,y)=xy+y^2$.
   Determinare il tipo delle tre coniche $f(x,y)=1$, $f(x,y)=0$ e $f(x,y)=-1$ in ciascun caso.

5. Dire se esiste un vettore colonna $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tale che ${}^t\mathbf{v}A\mathbf{v}<0$ nei seguenti casi:
   (i) $A=\begin{pmatrix}4&-3\\-3&4\end{pmatrix}$, (ii) $A=\begin{pmatrix}4&5\\5&4\end{pmatrix}$, (iii) $A=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

6. Dire quali delle seguenti matrici sono ortogonali e quali rappresentano una rotazione:
   (i) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$, (ii) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, (iv) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}&1-\sqrt{3}\\-1+\sqrt{3}&1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

7. Si consideri la conica $C: x^2+xy+y^2+x+y=0$. Trovare l'equazione che risulta ponendo $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ e calcolare il centro in termini delle coordinate (X,Y). Disegnare C mettendo in evidenza gli assi x,y,X,Y.

8. (a) Determinare gli autovalori e autovettori di ciascuna delle seguenti matrici A e trovare una matrice ortogonale P con $\det P=1$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale:
   (i) $\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-3\end{pmatrix}$.
   (b) Date $A,P\in\mathbb{R}^{2,2}$ tale che P è ortogonale e $D=P^{-1}AP$ è diagonale, verificare che $A=PDP^{-1}$ è necessariamente una matrice simmetrica.

9. Ridurre le seguenti coniche a forma canonica e classificarle:
   (i) $x^2+4xy-2y^2+1=0$, (ii) $4x^2+xy+4y^2+4x-2y=6$,
   (iii) $4xy-2x=2$, (iv) $4(x^2+xy+y)+y^2=0$.

10. Sia C la conica di equazione $x^2+2y^2+2x-4y+c=0$. Sono tutte vere le seguenti affermazioni?
    (i) Se $c=2$ allora C è un'ellisse;
    (ii) Se $c=3$ allora C contiene una retta;
    (iii) Se $c=4$ allora C non ha punti reali.

11. Sia C l'ellisse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Si considerino i punti $F=(-3,0)$ e $F'=(3,0)$. Se $P=(x,y)$ è un punto di C, verificare che la distanza $|PF|$ soddisfa $|PF|^2=(5+\frac{3}{5}x)^2$ e anche che $|PF'|^2=(5-\frac{3}{5}x)^2$. Dedurre che $|PF|+|PF'|=10$, indipendemente da P.

12. Data la conica $C: x^2+xy+y^2-2x-y=0$, trovarne il centro (u,v) e una matrice simmetrica A per cui l'equazione diventi $(X,Y)A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=1$ con $x=X+u$, $y=Y+v$. Trovare gli autovalori e autovettori di A e scrivere la matrice P di una rotazione con la proprietà che $P^{-1}AP$ sia diagonale. Disegnare la conica C rispetto agli assi originali (x,y).

13. Sia C la conica $4x^2+2xy+4y^2+20x+20y+39=0$. Facendo prima una rotazione, provare che C è un'ellisse con un asse passante per l'origine.

14. Ridurre in forma canonica e disegnare le seguenti coniche:
    (i) $x^2-5y^2+6x+4=0$, (ii) $x^2+3xy+5y^2=10$,
    (iii) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y=50$, (iv) $7x^2+8xy+y^2+9x-1=0$.

15. (a) L'iperbole $X^2-3Y^2=1$ in un opportuno sistema di coordinate può avere equazione:
    (i) $x^2-xy+y^2=1$, (ii) $x^2+xy=1$, (iii) $2x^2-2xy+y^2=1$?

    (b) Trovare i valori di a per cui la conica $(a+3)x^2+4xy+ay^2=1$ è un'ellisse.

16. Sia C la conica $3x^2-10xy+3y^2+x+y=0$. La retta $r: x+y=0$ interseca C in due punti distinti. Vero o falso? Disegnare C e r.

17. (a) Verificare che la conica C di equazione $23x^2-18xy+47y^2-x+3y=0$ è un'ellisse che passa per l'origine.

    (b) Verificare che il grafico $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$ è un'iperbole e trovarne l'equazione canonica.

18. Descrivere le coniche definite dalle seguenti curve con parametro t e disegnare l'arco per cui $0<t<1$: (i) $(t,\, t+t^2)$, (ii) $(2\cos t,\, \sin t)$, (iii) $(t+\frac{1}{t},\, t-\frac{1}{t})$.

19. (a) Determinare il valori di $a\in\mathbb{R}$ per cui la conica $2x^2-2axy+y^2+2x=0$ sia un'ellisse con rapporto dei semiassi uguali a 2.

    (b) Discutere, al variare di $b\in\mathbb{R}$, il tipo della conica $2x^2+2xy+by^2-2x+2by=0$.

    (c) Trovare il valore di $c\in\mathbb{R}$ per cui $c(1-x^2)-cxy+y^2+y=0$ è una parabola.

20. Provare che le due coniche

    $C_1: 2x^2+5y^2-4xy-2x+5y=0,\qquad C_2: -15x^2-20xy+2x+6y=20$

    sono un'ellisse e un'iperbole. Verificare che C_1 e C_2 hanno un asse in comune.