

Corso di Geometria – Esercizi proposti

ESEMPI DI QUADRICHE

- Sia S la sfera con centro $(3, 1, 1)$ e passante per $(3, 4, 5)$. Determinare il raggio e poi l'equazione di S .
- Si considerino il piano $\pi : x - 2y + 2z = 0$ e l'origine $O = (0, 0, 0)$. Determinare
 - la retta r ortogonale a π che passa per O ;
 - il punto C su r a distanza 6 da O con $z > 0$;
 - una sfera S di raggio 6 tangente a π in O .
- Si considerino le seguenti quadriche:

$$Q_1 : x^2 = 3y^2 + z^2 + 1, \quad Q_2 : z^2 = xy,$$

$$Q_3 : x^2 + 2y^2 - z^2 = 1, \quad Q_4 : -x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$
 Metterle in corrispondenza con l'elenco: iperboloide a una falda, iperboloide a due falde, cono, cilindro.
- Verificare che la retta r con equazione parametrica $(x, y, z) = (1, -t, t)$ è contenuta nella quadrica $Q : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Disegnare Q e r nello stesso sistema di riferimento. Trovare una seconda retta r' che appartiene a Q .
- Il cono circolare ottenuto ruotando la retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$ intorno l'asse z ha equazione:
 - $x^2 + 4y^2 = z^2$,
 - $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$,
 - $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$,
 - $z = 4x^2 + 4y^2$?
- Sia S la sfera di raggio $\sqrt{2}$ e centro l'origine e π il piano $z = x + y$. Verificare che $(x, y, z) \in S \cap \pi$ se e solo se (x, y, z) è una soluzione del sistema $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ z = x + y. \end{cases}$
 Ridurre a forma canonica la conica $x^2 + xy + y^2 = 1$ del piano Oxy e spiegare perchè non è una circonferenza.
- Le quadriche $Q_1 : z = x^2 + y^2$ e $Q_2 : z = x^2 - y^2$ sono entrambe esempi di paraboloidi. Scrivere le equazioni di piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ paralleli ai piani coordinati e tali che:
 - $Q_1 \cap \pi_1$ è una parabola,
 - $Q_1 \cap \pi_2$ è una circonferenza,
 - $Q_2 \cap \pi_3$ è un'iperbole,
 - $Q_2 \cap \pi_4$ è una coppia di rette.
- L'intersezione $Q_1 \cap Q_2$ dei cilindri $Q_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $Q_2 : x^2 + z^2 = 1$ è una curva contenuta nel piano $y = z$. Vero o falso?
- Si considerino il cono $Q : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ed il piano $\pi : y - z = 1$. Trovare le equazioni che risultano sostituendo $x = X$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + Z)$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-Y + Z)$. Sapendo che questo cambiamento di sistema di riferimento corrisponde ad una rotazione intorno all'asse x , dedurre che $\pi \cap Q$ è una parabola.
- Si considerino le sfere $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 4z = 0$. Verificare che l'intersezione $S_1 \cap S_2$ è una circonferenza contenuta nel piano $z = -1$ con centro $(0, 0, -1)$ e trovarne il raggio.