

# Capitolo 1

## Funzioni e integrali: alcuni preliminari

### 1.1 Convergenza uniforme e la norma del sup

Dato un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  (limitato o illimitato) e una successione di funzioni  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice che  $f_n$  converge puntualmente su  $I$  ad una certa funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f_n \rightarrow f$  puntualmente) se

$$\forall x \in I \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x),$$

o, equivalentemente, esplicitando la definizione di limite

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad (1.1)$$

Un concetto più forte di convergenza è dato dalla convergenza uniforme. Si dice che  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$  su  $I$  ( $f_n \rightarrow f$  uniformemente) se vale

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \forall x \in I. \quad (1.2)$$

Le due definizioni possono a prima vista apparire molto simili, eppure vi è una profonda differenza tra esse: nel caso della (1.1), il numero  $\bar{n}$ , la soglia dopo la quale  $f_n(x)$  e  $f(x)$  distano meno di  $\epsilon$ , in generale dipende oltre che da  $\epsilon$ , anche dal punto  $x \in I$  che stiamo considerando. Invece nel caso della (1.2), il numero  $\bar{n}$  dipende soltanto da quanto piccolo abbiamo fissato  $\epsilon$  e non dal particolare punto  $x \in I$  che si sta considerando, in altri termini, fissato  $\epsilon$  si è trovato un  $\bar{n}$  per cui  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$  qualunque sia  $x \in I$ .

Un modo utile di riformulare la convergenza uniforme è attraverso il seguente risultato:

**Proposizione 1.1** Sono fatti equivalenti:

1.  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $I$ ;
2.  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ .

**Dimostrazione** 2.  $\Rightarrow$  1.: supponiamo che la successione

$$a_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

Allora, fissato un qualunque  $\epsilon > 0$ , esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_n < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Poiché  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  per ogni  $x \in I$ , si ha anche

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \forall x \in I.$$

Questo mostra che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente.

1.  $\Rightarrow$  2.: supponiamo che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente. Allora, per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\bar{n}$  per cui

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq \bar{n}, \quad \forall x \in I.$$

Ne segue che,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \quad \forall x \in I.$$

Da questo segue la condizione 2. ■

**Esempio 1** Sia

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n}, \quad x \in [0, 1].$$

Chiaramente  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente su  $[0, 1]$ . Facciamo vedere che ci converge anche uniformemente. In effetti,

$$a_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{x^2}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Se invece avessimo considerato la stessa funzione ma sul dominio  $[0, +\infty[$ , avremmo ancora avuto la convergenza puntuale a 0 su tutto  $[0, +\infty[$ , tuttavia avremmo perso la convergenza uniforme:

$$a_n = \sup_{x \geq 0} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \geq 0} \frac{x^2}{n} = +\infty.$$

Si può facilmente verificare che si ha comunque convergenza uniforme su ogni intervallo limitato  $[0, T]$ .

La mancanza di convergenza uniforme non è strettamente collegata alla illimitatezza del dominio come mostrano i seguenti:

**Esempio 2** Sia

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1].$$

Chiaramente

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

La convergenza tuttavia non è uniforme:

$$a_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Esempio 3** Sia

$$f_n(x) = \frac{1}{n}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

Chiaramente  $f_n$  converge a 0 uniformemente su  $[0, +\infty[$  in quanto

$$a_n = \sup_{x \geq 0} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

In Figura 1.1 riportiamo il grafico di alcuni elementi delle successioni illustrate negli Esempi 1 e 2.

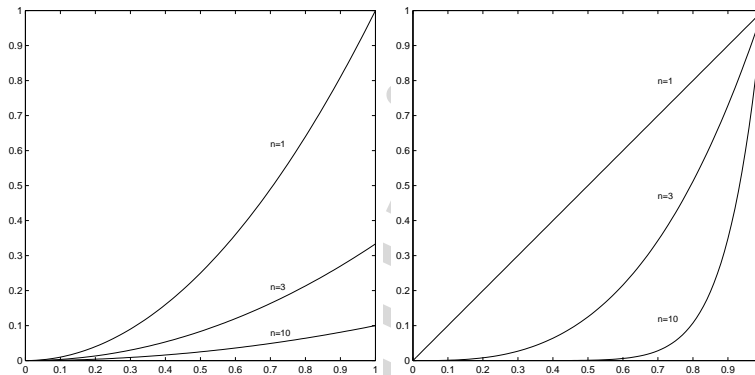


Figura 1.1: a sinistra  $x^2/n$ , a destra  $x^n$ .

Si noti come nel caso della successione  $x^n$ , comunque si scelga  $n$  vi siano valori di  $x$  per i quali la distanza dalla funzione limite è arbitrariamente vicina ad 1: questo è il senso della mancanza di uniformità nella convergenza.

### 1.1.1 Serie di funzioni

Di particolare importanza nelle applicazioni sono le serie di funzioni. Dato un intervallo  $I$  e una successione di funzioni  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , consideriamo la successione delle somme parziali:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

Chiaramente  $s_n(x)$  formano a loro volta una successione di funzioni definite su  $I$ ; questo tipo di successioni si chiamano serie di funzioni e si indicano con il simbolo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x). \quad (1.3)$$

Trattandosi di particolari successioni di funzioni, per esse si può parlare di convergenza puntuale ed uniforme che nel caso specifico assumono la forma seguente: la serie di funzioni (1.3) converge puntualmente su  $I$  se, per ogni  $x \in I$  fissato, essa converge come serie numerica, cioè se, per ogni  $x \in I$  fissato, esiste finito il limite della successione delle somme parziali

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

Indichiamo con  $S(x)$  il limite sopra indicato (si noti che esso dipende in generale dalla variabile  $x$  come accade per le successioni di funzioni). La serie di funzioni (1.3) converge uniformemente su  $I$  al suo limite  $S(x)$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - S(x) \right| = 0.$$

Vale il seguente importante criterio per studiare la convergenza di una serie di funzioni.

**Teorema 1.2** (*Criterio di Weierstrass*) *Sia data la serie di funzioni (1.3). Supponiamo che esista una successione numerica a valori non negativi  $\{M_n\}$  tale che*

(a)  $|f_n(x)| \leq M_n$  per ogni  $x \in I$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) La serie numerica  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$  converge.

Allora, la serie (1.3) converge uniformemente su  $I$ .

**Dimostrazione** Si noti intanto che, fissato un qualunque  $\bar{x} \in I$ , poiché  $|f_n(\bar{x})| \leq M_n$  per ogni  $n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$  converge, anche la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\bar{x})$  converge assolutamente per confronto, e quindi anche puntualmente. La convergenza puntuale della serie di funzioni è dunque assicurata. Chiamiamo  $S(x)$  la somma di tale serie e facciamo ora vedere che si ha anche la convergenza uniforme. Utilizziamo per questo la Proposizione 1.1. Si ha che, qualunque sia  $x \in I$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k.$$

Dunque si ha anche

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - S(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k.$$

Segue da (b) che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k = 0.$$

Per confronto di successioni si ha dunque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - S(x) \right| = 0.$$

In virtù della Proposizione 1.1, sappiamo che questo equivale alla convergenza uniforme della nostra serie di funzioni. ■

Per applicare il criterio di Weierstrass è necessario costruire la successione  $M_n$ . Si noti che la più piccola successione  $M_n$  che soddisfi la condizione (b) è senz'altro data da

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|.$$

Quindi, se riusciamo a dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{x \in I} |f_k(x)|$$

è una serie convergente, possiamo applicare il criterio di Weierstrass.

**Esempio 4** Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{k^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Si ha,

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}.$$

Poiché  $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 < +\infty$ , segue dal Criterio di Weierstrass che la serie di funzioni converge uniformemente su  $[0, 1]$ . Si noti che in questo caso si può anche calcolare esplicitamente la somma della serie di funzioni:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{k^2} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{x\pi^2}{6}.$$

**Esempio 5** Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{n + x^2 n^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La forma della successione di funzioni che determinano la serie sono riportate in Figura ???. Per trovare il massimo è sufficiente vedere dove si annulla la derivata:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{n + x^2 n^3} \right) = \frac{n + x^2 n^3 - 2x^2 n^3}{(n + x^2 n^3)^2} = \frac{n(1 - x^2 n^2)}{(n + x^2 n^3)^2}.$$

Dunque,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n + x^2 n^3} \right| = \frac{1/n}{n + n} = \frac{1}{2n^2}.$$

Poiché  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/2n^2$  risulta convergente, per il Criterio di Weierstrass, la nostra serie di funzioni converge uniformemente su tutto  $\mathbb{R}$ .

E' bene ricordare che il Criterio di Weierstrass esprime una condizione soltanto sufficiente per la convergenza uniforme, ma non necessaria come mostra il seguente semplice esempio:

**Esempio 6** Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La serie in realtà non dipende proprio da  $x$ , cioè essa è costante in  $x$ . Dunque in questo caso la convergenza uniforme è semplicemente equivalente alla convergenza della serie numerica che, d'altra parte, sappiamo convergere in virtù del criterio di Leibnitz. Si noti tuttavia che,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$$

e sappiamo che  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k}$  non converge. Il Criterio di Weierstrass in questo caso non dà alcuna informazione.

Una fondamentale famiglia di serie di funzioni è costituita dalle serie di potenze. Sia data una successione numerica  $\{a_n\}$  e consideriamo la serie di potenze associata  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  che supponiamo abbia raggio di convergenza  $R > 0$ . Sappiamo allora che la serie di potenze converge puntualmente (addirittura assolutamente) su  $] -R, R[$ . Mostriamo che, fissato un qualunque  $\bar{R} < R$ , si ha convergenza uniforme nel sottointervallo  $[-\bar{R}, \bar{R}]$ . In effetti si ha che

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \bar{R}^n, \quad \forall x \in [-\bar{R}, \bar{R}].$$

Poiché  $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \bar{R}^k$  converge, ne segue che, per il Criterio di Weierstrass, la serie di potenze converge uniformemente su  $[-\bar{R}, \bar{R}]$ . In generale non è garantita la convergenza uniforme su  $] -R, R[$  come mostra il seguente:

**Esempio 7** Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sappiamo che il suo raggio di convergenza è 1 e che la somma della serie è  $(1-x)^{-1}$ . Facciamo vedere che non c'è convergenza uniforme su  $] -1, 1[$ . Si noti che non si può utilizzare per questo il Criterio di Weierstrass in quanto

esso esprime una condizione soltanto sufficiente per la convergenza uniforme. Ricorriamo dunque alla condizione espressa dalla Proposizione 1.1. Si noti che si ha, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  fissato,

$$a_n = \sup_{|x| < 1} \left| \sum_{k=0}^n x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{|x| < 1} \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{|x| < 1} \left| \frac{-x^{n+1}}{1-x} \right| = +\infty.$$

Quindi sicuramente  $a_n$  non è una successione infinitesima e di conseguenza non può esserci convergenza uniforme.

La convergenza uniforme garantisce che molte proprietà di regolarità della successione di funzioni  $f_n$  si trasferiscono alla funzione limite  $f$ . Si ha ad esempio che se le funzioni  $f_n$  sono continue anche la funzione limite lo è. Si noti che questo in generale non accade se non abbiamo convergenza uniforme come mostra l'Esempio 2. Ecco con precisione il risultato che vale

**Teorema 1.3** *Sia  $I$  un intervallo limitato o illimitato e sia  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni che converge uniformemente ad una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora:*

1. *Se le  $f_n$  sono continue su  $I$ , anche  $f$  è continua su  $I$ .*
2. *Se  $I$  è chiuso e limitato e le  $f_n$  sono continue, si ha*

$$\int_I f_n(x) dx \rightarrow \int_I f(x) dx.$$

3. *Se le  $f_n$  sono derivabili su  $I$  e le  $f'_n$  sono continue e convergono uniformemente ad una certa funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , allora  $f$  è ovunque derivabile su  $I$  e si ha  $f'(x) = g(x)$  per ogni  $x \in I$ .*

**Dimostrazione** 1) Fissiamo  $x_0 \in I$  e dimostriamo che  $f$  è continua in  $x_0$ . Sia  $\epsilon > 0$ . Poiché  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, esiste sicuramente  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$|f(x) - f_{\bar{n}}(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x \in I.$$

Possiamo dunque scrivere

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{\bar{n}}(x) + f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0) + f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Poiché per ipotesi  $f_{\pi}$  è continua, ne segue che esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|f_{\pi}(x) - f_{\pi}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \quad (1.5)$$

Usando (1.5) nella (1.4) si ottiene dunque che se  $x \in I$  è tale che  $|x - x_0| < \delta$ , allora

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

e questo mostra proprio che  $f$  è continua in  $x_0$ .

2) Abbiamo che

$$\begin{aligned} \left| \int_I f(x) \, dx - \int_I f_n(x) \, dx \right| &\leq \int_I |f(x) - f_n(x)| \, dx \\ &\leq \int_I \left( \sup_{s \in I} |f(s) - f_n(s)| \right) \, dx \\ &= \sup_{s \in I} |f(s) - f_n(s)| \cdot m(I) \end{aligned}$$

dove  $m(I)$  indica la lunghezza dell'intervallo  $I$ . Per il Teorema del confronto si ha dunque la tesi.

3) per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x, x_0 \in I$  vale la formula seguente

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) \, ds$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  ed utilizzando 2) si ottiene:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(s) \, ds$$

Si noti che per 1) la funzione  $g$  è continua e dunque, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,  $f$  risulta derivabile ovunque e la sua derivata è proprio  $g$ . ■

**Osservazione:** Il punto 1. del teorema precedente si può leggere come un risultato di scambio di limiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Il punto 2. come uno scambio di limite ed integrale:

$$\int_I \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) \, dx.$$

Il punto 3. del teorema precedente ammette un'utile estensione alle derivate successive.

**Corollario 1.4** *Sia  $I$  intervallo e sia  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$  che converge uniformemente ad una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e che inoltre, per ogni  $j \leq k$ , la successione delle derivate  $j$ -esime  $f_n^{(j)}$  converge uniformemente ad una funzione  $g^j : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  su  $I$  e si ha  $f^{(j)}(x) = g^j(x)$  per ogni  $x \in I$ , per ogni  $j = 1, \dots, k$ .*

**Dimostrazione** Dimostriamolo per induzione su  $k$ . Il caso  $k = 1$  è contenuto nel punto 3. del teorema precedente. Supponiamo il risultato vero per un certo  $k - 1$  e dimostriamolo per  $k$ . Consideriamo la successione  $f'_n$  che sappiamo convergere uniformemente a  $g^1(x)$ . Per ipotesi induttiva sappiamo che  $g^1(x)$  è di classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  e si ha  $(g^1)^{(j-1)} = g^{(j)}$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ . D'altra parte, segue dal caso  $k = 1$  che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1$  e che  $f' = g^1$ . Ne segue che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^k$  e  $f^{(j)} = (g^1)^{(j-1)} = g^{(j)}$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ . ■

I risultati precedenti hanno una doppia utilizzazione: da una parte assicurano regolarità dei limiti uniformi di successioni di funzioni regolari, dall'altra permette in alcuni casi di dimostrare che una determinata convergenza non è uniforme se la funzione limite esibisce una regolarità inferiore alle funzioni della successione. Cominciamo a fare alcune considerazioni sul primo utilizzo. La somma della serie dell'Esempio 5, che non è esplicitamente calcolabile, risulta essere una funzione continua su tutto  $\mathbb{R}$  in virtù del punto 1. del Teorema 1.3.

Per le serie di potenze si ottiene un risultato di notevole importanza:

**Corollario 1.5** Consideriamo la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$  che supponiamo abbia raggio di convergenza  $R > 0$ . La somma di tale serie di potenze è una funzione di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su  $] -R, R[$ .

**Dimostrazione** Fissiamo un qualunque sottointervallo  $[-\bar{R}, \bar{R}]$  con  $\bar{R} < R$  e fissiamo un qualunque  $N \in \mathbb{N}$ . Dimostreremo il risultato facendo vedere che la somma della serie è di classe  $\mathcal{C}^N$  su  $[-\bar{R}, \bar{R}]$ . Le somme parziali sono chiaramente di classe  $\mathcal{C}^N$  su  $[-\bar{R}, \bar{R}]$ ; inoltre le varie serie derivate sono ancora serie di potenze aventi tutte lo stesso raggio di convergenza  $R$ . Dunque esse convergono tutte uniformemente su  $[-\bar{R}, \bar{R}]$ . Segue allora dal Corollario 1.4 che la somma della serie è anch'essa di classe  $\mathcal{C}^N$ . ■

Facciamo ora alcune considerazioni sull'altro possibile utilizzo del Teorema 1.3. Nell'Esempio 2 la successione  $f_n(x) = x^n$  è continua ovunque mentre la funzione limite  $f(x)$  presenta una discontinuità in  $x = 0$ . Ne segue che la convergenza non può essere uniforme come in effetti era stato direttamente mostrato prima.

Se  $I$  è un intervallo, indichiamo con  $\mathcal{C}(I)$  l'insieme delle funzioni continue su  $I$  a valori reali (o anche complessi). Esso è in modo naturale uno spazio vettoriale di funzioni reale o complesso a seconda di dove prendono valore le funzioni. Se inoltre  $I$  è chiuso e limitato, si può introdurre una norma su questo spazio, detta norma del sup:

$$f \in \mathcal{C}(I) \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Si noti che in virtù del Teorema di Weierstrass il sup sopra è in realtà un massimo e dunque la norma è sempre un numero finito. E' detta norma perché possiede le seguenti proprietà (come ad esempio la norma euclidea su  $\mathbb{R}^n$ ):

- (a)  $\|f\|_\infty \geq 0$  e  $\|f\|_\infty = 0$  se e soltanto se  $f \equiv 0$ .
- (b) Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|_\infty$ .
- (c)  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  (questa è nota come disuguaglianza triangolare).

Ogni volta che su uno spazio abbiamo una norma possiamo introdurre un relativo concetto di convergenza. Nella fattispecie del nostro spazio  $\mathcal{C}(I)$  diciamo che  $f_n$  converge a  $f$  nella norma del sup se  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Poiché

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

si ha che la convergenza in norma del sup è esattamente la nostra vecchia convergenza uniforme su  $I$ .