SERIE NUMERICHE

Test di autovalutazione

1. E' data la serie:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3a-1}{1+a^2} \right)^n$$
dove $a \in \mathbf{R}$. Allora:
   (a) se $a = 1$ la serie converge a 1
   (b) se $a = 3$ la somma della serie vale 5
   (c) se $a = -5$ la serie diverge a $-\infty$
   (d) se $-2 \leq a \leq 0$ la serie converge.

2. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{3}{7}\right)^n$
   (a) converge a $1 + \dfrac{7}{4}$
   (b) è indeterminata
   (c) converge a 1
   (d) diverge.

3. La serie (dipendente dal parametro $b \in \mathbf{R}$) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos b - 1)^n$:
   (a) converge $\forall b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$
   (b) se $b = \dfrac{3\pi}{2}$, non converge
   (c) converge $\forall b \in \mathbf{R}_+$
   (d) se $b = \dfrac{\pi}{6}$, converge a 2.

4. La serie (dipendente dal parametro $b \in \mathbf{R}$)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b^2 + 4b + 3)^n$$
   (a) converge se $b \in]-2-\sqrt{2}, -2[\bigcup]-2, -2+\sqrt{2}[$
   (b) se $b = -3$, diverge a $-\infty$
   (c) converge se $b \in \mathbf{R}_+$
   (d) se $b = -4$, converge.

5. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+3a^2}{2a^2+5}\right)^n$:

(a) se $a=0$ è divergente

(b) converge se $-2<a<2$

(c) converge $\forall a\in\mathbb{R}$

(d) non esiste nessun a per cui converga, perché $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1+3a^2}{2a^2+5}\right)\neq 0$.

6. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^n\cdot n}$:

(a) è maggiorata dalla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8^n}$

(b) è una maggiorante della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$

(c) converge (per il criterio del rapporto)

(d) diverge, perché è una minorante della serie divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

7. Di una serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ si sa che la somma vale $\frac{8}{3}$. Allora:

(a) non si può affermare nulla sul comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{8}{3}$

(c) non è detto che la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}a_n$ converga a $\frac{8}{3}$

(d) c'è un a_k maggiore di $\frac{8}{3}$.

8. Sia $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione a termini positivi convergente a 0. Allora:

(a) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ è convergente

(b) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge se la successione (a_n) è decrescente

(c) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge

(d) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge se la successione $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è decrescente.

9. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{2^n}{n}$:

   (a) è assolutamente convergente
   (b) è convergente
   (c) è assolutamente divergente
   (d) è divergente.

10. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n+1}$:

   (a) converge
   (b) è indeterminata
   (c) è una maggiorante della serie armonica
   (d) è una minorante della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$.

11. Si considerino la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e la successione $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

   (a) Se la successione (a_n) è convergente, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
   (b) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente .
   (c) Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge.
   (d) Se la successione (a_n) è oscillante, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è indeterminata.

12. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^n$ dove k è un parametro reale:

   (a) se $k \neq 1$, converge
   (b) converge se $k < 0$
   (c) se $k < 0$ è indeterminata
   (d) se $k = -2$ ha per somma $\frac{1}{3}$.

13. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$:

(a) ha per somma $0 = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(b) è divergente

(c) è indeterminata

(d) è una maggiorante della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

14. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n}{n!}$:

(a) non converge, perché $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!} \neq 0$

(b) per il criterio del rapporto, converge

(c) poiché $5^n > n!$, si ha $a_n = \frac{5^n}{n!} > 1$ e dunque la serie diverge

(d) diverge, per il criterio della radice.

15. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+3)}$:

(a) non converge, perché la successione $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ è infinitesima di ordine 2, per $n \to +\infty$

(b) ha per somma 2

(c) è una serie telescopica

(d) converge al valore del limite $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(n+3)}$.

16. Si considerino le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$.

(a) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$ converge.

(b) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$ diverge.

(c) Se $a_n \geq 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$ converge .

(d) Se $a_n \geq 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2$ diverge.

17. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{1+n^2}-n^2)$:

(a) coincide con la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n^2}$

(b) è indeterminata, perché non esiste $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1+n^2}-n^2)$

(c) diverge a $-\infty$

(d) ha per somma 0.

18. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}}$:

(a) è maggiorata dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(b) è assolutamente convergente

(c) è indeterminata

(d) è convergente.

19. La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\log n}$:

(a) converge assolutamente

(b) converge semplicemente

(c) è indeterminata

(d) è una maggiorante della serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$.

20. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ 2^n}$:

(a) è una minorante della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

(b) diverge

(c) è una maggiorante della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(d) non è definita in campo reale.

21. La serie (dipendente dal parametro $b \in \mathbb{R}$) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos b)^n$:

(a) converge $\forall b \in \mathbb{R}_+$

(b) converge $\forall b \neq k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$

(c) se $b = \dfrac{\pi}{3}$, converge a 1

(d) se $b = \pi$, diverge a $+\infty$

22. Sia $a_n = \dfrac{\sin(\pi n)}{\sqrt{n}}$; si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Allora :

(a) la serie converge assolutamente

(b) la serie converge semplicemente ma non assolutamente

(c) la successione (a_n) è strettamente decrescente

(d) la serie diverge, perché , per $n \to \infty$, $a_n \sim \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge

23. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n+5}$:

(a) ha per somma $\dfrac{1}{3}$

(b) converge semplicemente per il criterio di Leibniz

(c) converge assolutamente

(d) non converge

24. La somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 8^{-n}$:

(a) vale 8

(b) vale $\dfrac{1}{7}$

(c) non si può calcolare

(d) vale $\dfrac{8}{7}$

25. Data la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 8$, allora:

(a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 8$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9}{8}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{8}$

26. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$:

(a) la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right)$ converge

(b) $f(x)$ cambia segno in $[\ 2\ , +\infty\ [$

(c) l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$ dx è indeterminato

(d) la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right)$ è a termini di segno alterno

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{3a-1}{1+a^2}$ e primo termine 1. Pertanto :

   (a) è falsa: infatti, se $a = 1$, $q = 1$ e dunque la serie diverge

   (b) è vera: infatti, se $a = 3$, $q = \dfrac{4}{5}$; pertanto la serie converge e la sua somma vale

   $$S = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 5$$

   (c) è falsa: infatti, se $a = -5$, $q = -\dfrac{8}{13}$; pertanto la serie converge

   (d) è falsa: ad esempio, se $a = 0$, $q = -1$ e quindi la serie oscilla.

2. RISPOSTA ESATTA: (d).

   La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{3}{7}\right)^n$ è una serie geometrica di ragione $q = 1 + \dfrac{3}{7}$.

   Poiché $q > 1$, la serie diverge.

   Pertanto le risposte (a) , (b), (c) sono false, mentre (d) è vera.

3. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \cos b - 1$. Pertanto :

   (a) è falsa: infatti, ad esempio, se $b = \dfrac{3\pi}{2}$, $q = -1$, e dunque la serie è oscillante.

   (b) è vera: per quanto detto in (a) , se $b = \dfrac{3\pi}{2}$ la serie non converge.

   (c) è falsa: ad esempio, se $b = \dfrac{3\pi}{2}$ la serie non converge.

   (d) è falsa: se $b = \dfrac{\pi}{6}$, $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$; quindi la serie converge al valore

   $$S = \frac{1}{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)} = \frac{2}{4 - \sqrt{3}} \neq 2.$$

4. RISPOSTA ESATTA: (a).

   Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = b^2 + 4b + 3$ e primo termine 1. Pertanto :

   (a) è vera: infatti la serie converge se e solo se:

   $$-1 < b^2 + 4b + 3 < 1 \iff -2 - \sqrt{2} < b < -2 + \sqrt{2} \ \wedge \ b \neq -2 \iff$$
   $$\iff b \in \,]-2-\sqrt{2}\,, -2\,[\, \bigcup \,]-2\,, -2+\sqrt{2}\,[\ .$$

   (b) è falsa: infatti, se $b = -3$, $q = 0$ e dunque la serie converge a 0.

   (c) è falsa: ad esempio, se $b = 1$, $q = 8$; pertanto la serie diverge.

   (d) è falsa: se $b = -4$, $q = 3$ e quindi la serie diverge.

5. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{1+3a^2}{2a^2+5}$. Pertanto :

   (a) è falsa: infatti, se $a = 0$, $q = \dfrac{1}{5}$, e dunque la serie converge.

   (b) è vera; infatti, la serie converge se e solo se

   $$-1 < \frac{1+3a^2}{2a^2+5} < 1 \iff -2a^2 - 5 < 1 + 3a^2 < 2a^2 + 5 \iff -2 < a < 2$$

   (c) è falsa: ad esempio, se $a = 3$, $q = \dfrac{28}{23}$; pertanto la serie diverge

   (d) è falsa: si deve effettuare il calcolo non del $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3a^2}{2a^2+5}$, ma del

   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+3a^2}{2a^2+5}\right)^n \ .$$

6. RISPOSTA ESATTA: (c).

   (a) è falsa: infatti, $\forall n \geq 1$, $5^n\ n < 8^n$ e dunque $\dfrac{1}{5^n\ n} > \dfrac{1}{8^n}$

   (b) è falsa: infatti, $\forall n \geq 1$, $5^n n > n$ e dunque $\dfrac{1}{5^n n} < \dfrac{1}{n}$

   (c) è vera; infatti:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\ n}{5^{n+1}(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5} < 1$$

   (d) è falsa: infatti, pur essendo vero che la serie data è una minorante della serie armonica (che è divergente), non è detto che sia divergente.

7. RISPOSTA ESATTA: (c).

(a) è falsa: infatti, poiché la serie è a termini positivi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) è falsa: infatti, poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, necessariamente $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(c) è vera; infatti la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ converge al numero $\dfrac{8}{3} - a_0 - a_1 - a_2$

(d) è falsa. Infatti, se esistesse un $a_k > \dfrac{8}{3}$ si avrebbe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{8}{3} \iff a_k + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots) = \frac{8}{3} .$$

Questo è assurdo poiché $a_k > \dfrac{8}{3}$ e $\forall i \in \mathbb{N}$, $a_i \geq 0$.

8. RISPOSTA ESATTA: (b).

(a) è falsa: ad esempio, la successione $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ è a termini positivi e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ma la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverge.

(b) è vera, per quanto afferma il criterio di Leibniz

(c) è falsa: ad esempio la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge

(d) è falsa: si consideri lo stesso controesempio di (c).

9. RISPOSTA ESATTA: (c).

(a) è falsa: la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ è divergente, in quanto serie a termini positivi il cui termine generale $\dfrac{2^n}{n}$ non tende a 0.

(b) è falsa: il termine generale $(-1)^n \frac{2^n}{n}$ non tende a 0

(c) è vera, per quanto detto in (a)

(d) è falsa: la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{2^n}{n}$ è oscillante.

10. RISPOSTA ESATTA: (c).

(a) è falsa: infatti, come si vedrà in (c), la nostra serie è maggiorante di una serie divergente, e dunque diverge.

(b) è falsa, in quanto si tratta di una serie a termini positivi.

(c) è vera, perché, come si può facilmente verificare, $\forall n \geq 2$, $\dfrac{2n}{n^2+n+1} > \dfrac{1}{n}$

(d) è falsa perché si verifica che , $\forall n \geq 1$, $\dfrac{2n}{n^2+n+1} > \dfrac{1}{3n}$

11. RISPOSTA ESATTA: (c).

(a) e (b) sono false: si consideri come controesempio la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

(c) è vera: è la contronominale della condizione necessaria per la convergenza di una serie, che afferma:

se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(d) è falsa perché la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è a termini positivi e dunque non può essere indeterminata.

12. RISPOSTA ESATTA: (b).

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{k+1}{k-1}$. Pertanto :

(a) è falsa: ad esempio, se $k = 0$, $q = -1$, e dunque la serie oscilla

(b) è vera: infatti la serie converge se e solo se

$$-1 < \frac{k+1}{k-1} < 1 \iff k < 0$$

(c) è falsa (si veda (b))

(d) è falsa: se $k = -2$, $q = \dfrac{1}{3}$ e quindi la serie converge al valore S$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

13. RISPOSTA ESATTA: (b).

(a) è falsa; infatti, posto $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, la somma della serie è (se esiste finito)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ e non $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$

(b) è vera, perché: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$

(c) è falsa, perché è una serie a termini positivi

(d) è falsa, perché $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

14. RISPOSTA ESATTA: (b).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1\ .\ \text{Dunque (b) è vera e (d) è falsa.}$$

(a) è falsa, perché $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$

(c) è falsa, perché per $n > 10$, $5^n < n!$

15. RISPOSTA ESATTA: (c).

Poiché $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$, si tratta di una serie telescopica e si può verificare che $S_n == a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$. Pertanto:

(a) è falsa: la successione $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ è infinitesima di ordine 2, per $n \to +\infty$ e dunque per il criterio di McLaurin la serie converge

(b) è falsa perché $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{3}{2}$

(c) è vera, per quanto detto all'inizio

(d) è falsa perché la serie converge a $\frac{3}{2}$ e non a 0 .

16. RISPOSTA ESATTA: (c).

(a) è falsa: ad esempio la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

(b) e (d) sono false: si consideri come controesempio la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(c) è vera; infatti, essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, necessariamente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dunque, essendo per ipotesi $a_n \geq 0$, si avrà , definitivamente , $0 \leq a_n < 1$ e quindi $0 \leq (a_n)^2 < a_n < 1$. Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ è una minorante di una serie convergente e quindi converge.

17. RISPOSTA ESATTA: (c).

(a) è falsa, perché $a_n = \sqrt{1+n^2} - n^2 = \dfrac{1+n^2-n^4}{\sqrt{1+n^2}+n^2} \neq \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}+n^2}$

(b) è falsa, perché si tratta di una serie a termini negativi, e dunque non può essere indeterminata

(c) è vera perché (per quanto visto in (b)) la serie può solo convergere o divergere a $-\infty$; ma $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, e dunque la serie non converge

(d) è falsa per quanto visto in (c).

18. RISPOSTA ESATTA: (d).

Osserviamo che $\sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Pertanto:

(a) è falsa perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$ solo se n è dispari.

(b) è falsa perché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Per il criterio di Leibniz: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ e la successione $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ è decrescente. Dunque (d) è vera e (c) è falsa.

19. RISPOSTA ESATTA: (b).

Si osservi che $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Dunque:

(a) è falsa : la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ diverge per il criterio del confronto, essendo una maggiorante della serie divergente $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) è vera per il criterio di Leibniz, poiché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$ e la successione $\left(\dfrac{1}{\log n}\right)_{n\geq 2}$ è decrescente. Dunque (c) è falsa.

(d) è falsa perché $\dfrac{(-1)^n}{\log n} > \dfrac{1}{n}$ solo se n è pari.

20. RISPOSTA ESATTA: (a).

(a) è vera perché, essendo $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1$, si ha $\dfrac{1}{\sqrt{n}\; 2^n} < \dfrac{1}{2^n}$

(b) è falso: la serie converge perché minorante di una serie convergente (si veda (a))

(c) è falso perché $\dfrac{1}{\sqrt{n}\; 2^n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(d) è falso perché , se $n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{R}$.

21. RISPOSTA ESATTA: (b).

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \cos b$. Dunque:

(a) è falsa: ad esempio, se $b = 2\pi$, $q = 1$ e la serie diverge

(b) è vera: la serie converge se e sole se $\cos b \neq \pm 1$ e dunque se e solen se $b \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

(c) è falsa perché, se $b = \dfrac{\pi}{3}$, $q = \dfrac{1}{2}$ e la serie converge a S$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(d) è falsa perché, se $b = \pi$, $q = -1$ e la serie oscilla.

22. RISPOSTA ESATTA: (a).

Si osservi che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{\sqrt{n}} = 0$. Dunque (a) è vera e tutte le altre sono false.

23. RISPOSTA ESATTA: (d).

Osserviamo che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n+5} \neq 0$; dunque la serie non può convergere (né assolutamente né semplicemente).

Dunque (a), (b) e (c) sono false, mentre (d) è vera.

24. RISPOSTA ESATTA: (b).

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{1}{8}$ e primo termine $\dfrac{1}{8}$, anziché 1. Dunque converge al valore S$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{8}} - 1 = \dfrac{1}{7}$.

Pertanto (a), (c) e (d) sono false, mentre (b) è vera.

25. RISPOSTA ESATTA: (c).

Per ipotesi la serie converge e dunque si deve avere $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dunque (c) è vera e (a) è falsa.

(b) è falsa, perché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ può essere qualunque numero $\ell \leq 1$

(d) è falsa perché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ può essere qualunque numero $\ell \leq 1$.

26. RISPOSTA ESATTA: (a).

Si applichi il criterio di McLaurin alla funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$, per cui $f(n) = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$. Essa è decrescente su I$= [\, 2, +\infty\, [$ perché , su I , $f'(x) < 0$. Inoltre l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$ dx converge.

Dunque (a) è vera e (c) è falsa .

(b) è falsa perché, su I, $f(x) > 0$. Di conseguenza anche (d) è falsa .