FUNZIONI DI PIU' VARIABILI
Esercizi proposti

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \right\} \right]$

(b) $f(x,y) = \log(1-x^2) + \log(1-y^2)$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1 \right\} \right]$

(c) $f(x,y) = \tan \dfrac{y}{x}$ $\quad \left[\mathbf{R}^2 \setminus \left\{ (x,y) : y = \frac{\pi}{2}x + k\pi x \ (k \in \mathbf{Z}) \cup x = 0 \right\} \right]$

(d) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : (x \geq 0, y \geq 0) \cup (x \leq 0, y \leq 0) \right\} \setminus \left\{ (0,0) \right\} \right]$

(e) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ $\quad \left[\mathbf{R}^2 \setminus \left\{ (0,0) \right\} \right]$

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y) = 2x+3y$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : y = \dfrac{k-2x}{3} \right\} \forall k, \quad Im(f) = \mathbf{R} \right]$

(b) $f(x,y) = x^2+4y^2$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : \dfrac{x^2}{(\sqrt{k})^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1 \right\} \forall k > 0, \ \{(0,0)\} \text{ per } k = 0, \quad Im(f) = [0, +\infty) \right]$

(c) $f(x,y) = xy$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : xy = k \right\} \forall k, \quad Im(f) = \mathbf{R} \right]$

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2}$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : \dfrac{x^2}{k^2} + \dfrac{y^2}{(k/2)^2} = 1 \right\} \forall k > 0, \ \{(0,0)\} \text{ per } k = 0, \quad Im(f) = [0, +\infty) \right]$

(e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{2x^2+1}}$ $\quad \left[\left\{ (x,y) : y = 2k^2x^2 + k^2 \right\} \forall k \geq 0, \quad Im(f) = [0, +\infty) \right]$

3. Calcolare i seguenti limiti :

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad \left[\text{non esiste} \right]$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad \left[0 \right]$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \log(x^2+y^2)$ $\quad \left[0 \right]$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ $\quad \left[\text{non esiste} \right]$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sin x}$ $\quad \left[\left(\dfrac{-y\cos x}{\sin^2 x}, \dfrac{1}{\sin x} \right) \right]$

(b) $f(x,y) = \tan \dfrac{y}{x}$ $\quad \left[\left(\dfrac{-y}{x^2\cos^2(y/x)}, \dfrac{1}{x\cos^2(y/x)} \right) \right]$

(c) $f(x,y) = e^{x/y}$ $\quad \left[\left(\dfrac{e^{x/y}}{y}, -\dfrac{xe^{x/y}}{y^2}, \right) \right]$

(d) $f(x,y) = y^{\log x}$ $\quad \left[\left(\dfrac{y^{\log x}\log y}{x}, y^{\log x - 1}\log x \right) \right]$

5. Determinare il gradiente (se esiste) delle seguenti funzioni nei punti indicati:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ in $(0, 0)$ $\left[\text{ non esiste }\right]$

   (b) $f(x, y) = |\sin x - \sin y|(x^2 + y^2)$ in $(0, 0)$ $\left[(0, 0)\right]$

   (c) $f(x, y) = (xy - x - y)|x - y^2|$ in $(1, 1)$ $\left[\text{ non esiste }\right]$

6. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

   (a) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
   $\Big[\nabla f(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2),$
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2y^2),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xye^{x^2+y^2}\Big]$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2}$
   $\Big[\nabla f(x, y) = (\dfrac{-2x}{\sqrt{y - 2x^2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{y - 2x^2}}),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{-2y}{(y - 2x^2)^{3/2}},$
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\dfrac{1}{4(y - 2x^2)^{3/2}},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \dfrac{x}{(y - 2x^2)^{3/2}}\Big]$

   (c) $f(x, y) = \log \dfrac{1}{x + y}$
   $\Big[\nabla f(x, y) = (-\dfrac{1}{x + y}, -\dfrac{1}{x + y}),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^2},$
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^2},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^2}\Big]$

7. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{y + x^2}{x - y^4 - y}$ in $(1, 0)$ nella direzione $\vec{v} = (2, 1)$ $\left[4\right]$

   (b) $f(x, y) = e^{-x^2+y^4}$ in $(1, 0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1, 1)$ $\left[-\dfrac{2}{e}\right]$.

8. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ nel punto $(0, 1, 2)$ $\left[z = 2y\right]$

   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ nel punto $P(1, 1, 0)$ $\left[z = 2(x - y)\right]$

   (c) $f(x, y) = x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$ nel punto $P(0, 1, 2)$ $\left[z = 4y - 2\right]$

9. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy \sin(xy)$ $\left[f(x, y) = x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)\right]$

   (b) $f(x, y) = \log(1 + x^2y^2)$ $\left[f(x, y) = o(x^2 + y^2)\right]$

   (c) $f(x, y) = ye^x$ $\left[f(x, y) = y + xy + o(x^2 + y^2)\right]$

10. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

    (a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $\quad$ $[(-4,6)$ sella $]$

    (b) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ $\quad$ $[(0,0)$ sella ; $(1,1)$ minimo $]$

    (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - (1+x+y)^3$ $\quad$ $[(-1/3,-1/3)$ massimo ; $(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$ selle $]$

    (d) $f(x,y) = x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$ $\quad$ $[(-1,0),(1,0)$ minimi ; $(0,0),(\pm\sqrt{2},\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},-\sqrt{2})$ selle $]$

    (e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{8} - y$ $\quad$ $[(-64,-8)$ sella $]$

    (f) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$ $\quad$ $[(-1,0)$ minimo ; $(1,0)$ massimo $]$

    (g) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{4+x^2} + \dfrac{1}{2}y$ $\quad$ $[(0,-1)$ minimo ; $(2,-2),(-2,-2)$ selle $]$

    (h) $f(x,y) = \sqrt{-x^2-y^2+3}$ $\quad$ $[(0,0)$ massimo , $\{(x,y) : x^2+y^2=3\}$ minimi $]$

    (i) $f(x,y) = e^{x^4+y^3-4x^2-3y^2}$ $\quad$ $[(0,2),(-\sqrt{2},0)(\sqrt{2},0)$ selle ; $(0,0)$ massimo , $(\sqrt{2},2),(-\sqrt{2},2)$ minimi $]$

    (j) $f(x,y,z) = xyz$ $\quad$ [gli assi coordinati sono punti di sella]

11. Data la funzione $z = y^{2x}$, si chiede di:

    (a) Determinarne il dominio. $\quad$ $\Big[\Big\{(x,y) : y > 0\Big\} \Big]$

    (b) Scriverne la formula di Taylor nell'intorno del punto $(1,1)$, esplicitandone i termini fino al secondo ordine compreso. $\quad$ $\Big[\ 2 - 2x - 2y + 2xy + y^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2)\ \Big]$

    (c) Trovarne i punti stazionari e stabilirne il tipo. $\quad$ $\Big[\ (0,1)$ sella $\Big]$

12. Data la funzione $f(x,y) = -x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 + 4x - 4$, cercarne i punti critici e caratterizzarli con la matrice Hessiana. Calcolare inoltre la derivata direzionale di f nel punto di coordinate (1,1) e nella direzione del versore $\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

    $\Big[\ (1,\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3})$ selle , $(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 0)$ massimo , $(\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 0)$ minimo , $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{u}}(1,1) = \sqrt{2}\ \Big]$

13. Calcolare ∇f e $\nabla^2 f$ del campo scalare $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$

    $\Big[\ \nabla f = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}(x,y,z),\ \nabla^2 f = 0\ \Big]$

14. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

    (a) $F(x,y,z) = (xy^2,\ yz^2,\ zx^2)$ $\quad$ $\Big[\ \nabla \cdot F = x^2+y^2+z^2, \quad \nabla \wedge F = -(2yz,\ 2xz,\ 2xy)\ \Big]$

    (b) $F(x,y,z) = (xe^z,\ ye^x,\ ze^y)$ $\quad$ $\Big[\ \nabla \cdot F = e^x + e^y + e^z, \quad \nabla \wedge F = (e^y z,\ e^z x,\ e^x y)\ \Big]$

    (b) $F(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ $\quad$ $\Big[\ \nabla \cdot F = 3, \quad \nabla \wedge F = (0,0,0)\ \Big]$

    (d) $F(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$ $\quad$ $\Big[\nabla \cdot F = 0, \quad \nabla \wedge F = (0,0,0)\Big]$