SUCCESSIONI

Test di autovalutazione

1. La successione $a_n = (-1)^n + n$:
   (a) non ha limite
   (b) è divergente
   (c) è oscillante
   (d) assume valori positivi e negativi .

2. La successione $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$:
   (a) assume solo valori positivi
   (b) è indeterminata
   (c) è infinitesima
   (d) è costituita da numeri razionali .

3. La successione $a_n = \dfrac{3^n - 5n}{2^n - n^2}$:
   (a) è infinitesima
   (b) tende a $+\infty$
   (c) tende a $-\infty$
   (d) non esiste il limite per $n \to \infty$.

4. La successione $a_n = \dfrac{3n - 1}{n^2}$, con $n > 0$:
   (a) è strettamente decrescente
   (b) è indeterminata
   (c) è equivalente alla successione $b_n = \dfrac{1}{n}$
   (d) è equivalente alla successione $c_n = \dfrac{1}{n^2}$.

5. E' data la successione
$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$
   Allora:
   (a) la sua parte principale è $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
   (b) è oscillante
   (c) è equivalente alla successione $b_n = \dfrac{1}{n}$
   (d) è infinita.

6. Il limite
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \ :$$
   (a) tende a 0
   (b) tende a 1
   (c) tende a ∞
   (d) è indeterminato

7. La successione $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$:
   (a) è indeterminata
   (b) ha lo stesso limite della successione $b_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$
   (c) è convergente
   (d) è limitata tra 0 e 1.

8. La successione $a_n = n(\sqrt{n^4+1} - n^2)$:
   (a) tende a 0
   (b) tende a $\frac{1}{2}$
   (c) è illimitata
   (d) è equivalente alla successione $b_n = n^3$.

9. La successione
$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \ :$$
   (a) tende a 1
   (b) tende a e^{-1}
   (c) è divergente
   (d) tende a $-e$.

10. La successione
$$a_n = n^6 \log\left(1 + \frac{1}{n^7}\right) \ :$$
   (a) è divergente
   (b) è equivalente alla successione $b_n = \dfrac{1}{n}$
   (c) è illimitata
   (d) ha lo stesso limite della successione $c_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^7}\right)^{n^6}$.

11. La successione
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^7}\right)^{n^9} \ :$$
   (a) tende a e^2
   (b) ha lo stesso limite della successione $b_n = n^9 \log\left(1 + \dfrac{1}{n^7}\right)$
   (c) è equivalente alla successione $c_n = \dfrac{1}{n^2}$
   (d) tende a 1.

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Infatti, poiché $a_n = (-1)^n + n = n \pm 1$, si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \geq 0$.

2. RISPOSTA ESATTA: (c).

   Infatti $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$ in quanto è prodotto di una successione infinitesima per una successione che, pur non avendo limite, si mantiene limitata.
   La risposta (a) è falsa in quanto $\sin n$ può assumere valori anche negativi.
   La risposta (d) è errata in quanto , ad esempio, il numero reale $\sin 1$ non è razionale.

3. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Infatti per $n \to \infty$ si ha $a_n = \dfrac{3^n - 5n}{2^n - n^2} \sim \dfrac{3^n}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

4. RISPOSTA ESATTA: (a).

   Infatti per $n \to \infty$ si ha $a_n = \dfrac{3n-1}{n^2} \sim \dfrac{3n}{n^2} = \dfrac{3}{n}$. Dunque le risposte (b), (c) e (d) sono errate.
   La risposta (a) è esatta, poiché, se $n > m \geq 1$, si ha $a_n < a_m$. Infatti:
   $a_n - a_m = \dfrac{3n-1}{n^2} - \dfrac{3m-1}{m^2} = \dfrac{(m-n)(3mn-m-n)}{n^2m^2}$
   E' facile verificare che , $\forall n, m \in \mathbb{N} \ : n > m \geq 1$, si ha $3mn > m + n$.
   Pertanto , nella nostra ipotesi, $a_n - a_m < 0$.

5. RISPOSTA ESATTA: (a).

   Si ha infatti, razionalizzando:
   $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
   (si è tenuto conto che, per $n \to \infty$, si ha $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$).

6. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Si ha infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1$$

7. RISPOSTA ESATTA: (c).

   Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{n}\right) = 1$$

mentre

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\pm 1}{n} = 0$$

   Dunque (a) e (b) sono false e (c) è vera.

   La (d) è falsa, in quanto , per n pari, risulta $a_n > 1$.

8. RISPOSTA ESATTA: (a).

   Infatti, razionalizzando:

$$a_n = n(\sqrt{n^4+1}-n^2) = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \sim \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

9. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Infatti:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

   e dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{e}$.

10. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Poiché, per $n\to\infty$, $\log(1+\dfrac{1}{n^7}) \sim \dfrac{1}{n^7}$, si ha $a_n = n^6\log(1+\dfrac{1}{n^7}) \sim \dfrac{n^6}{n^7} = \dfrac{1}{n}$.
Dunque (b) è vera mentre (a) e (c) sono false.

   La successione c_n si può scrivere in forma esponenziale:
   $c_n = \left(1+\dfrac{1}{n^7}\right)^{n^6} = e^{n^6\log\left(1+\frac{1}{n^7}\right)} = e^{a_n}$.
Pertanto $\lim_{n\to\infty} c_n = e^{\lim_{n\to\infty} c_n} = 1 \neq \lim_{n\to\infty} a_n$.

11. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Analogamente a quanto fatto nel precedente test, scriviamo in forma esponenziale $a_n = e^{n^9\log\left(1+\frac{1}{n^7}\right)} = e^{b_n}$.

   Poiché $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, si avrà anche $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Dunque (b) è vera mentre (a) e (d) sono false.

   Per $n\to\infty$, si ha $b_n \sim \dfrac{n^9}{n^7} = n^2$ e quindi $a_n \sim e^{n^2}$. Pertanto (c) è falsa.