

SUCCESSIONI

Test di autovalutazione

1. La successione $a_n = (-1)^n + n$:
- (a) non ha limite
 - (b) è divergente
 - (c) è oscillante
 - (d) assume valori positivi e negativi .

2. La successione $a_n = \frac{\sin n}{n}$:
- (a) assume solo valori positivi
 - (b) è indeterminata
 - (c) è infinitesima
 - (d) è costituita da numeri razionali .

3. La successione $a_n = \frac{3^n - 5n}{2^n - n^2}$:
- (a) è infinitesima
 - (b) tende a $+\infty$
 - (c) tende a $-\infty$
 - (d) non esiste il limite per $n \rightarrow \infty$.

4. La successione $a_n = \frac{3n - 1}{n^2}$, con $n > 0$:
- (a) è strettamente decrescente
 - (b) è indeterminata
 - (c) è equivalente alla successione $b_n = \frac{1}{n}$
 - (d) è equivalente alla successione $c_n = \frac{1}{n^2}$.

5. E' data la successione

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

Allora:

- (a) la sua parte principale è $\frac{1}{n\sqrt{n}}$
- (b) è oscillante
- (c) è equivalente alla successione $b_n = \frac{1}{n}$
- (d) è infinita.

6. Il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) :$$

- (a) tende a 0
- (b) tende a 1
- (c) tende a ∞
- (d) è indeterminato

7. La successione $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$:

- (a) è indeterminata
- (b) ha lo stesso limite della successione $b_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$
- (c) è convergente
- (d) è limitata tra 0 e 1.

8. La successione $a_n = n(\sqrt{n^4 + 1} - n^2)$:

- (a) tende a 0
- (b) tende a $\frac{1}{2}$
- (c) è illimitata
- (d) è equivalente alla successione $b_n = n^3$.

9. La successione

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n :$$

- (a) tende a 1
- (b) tende a e^{-1}
- (c) è divergente
- (d) tende a $-e$.

10. La successione

$$a_n = n^6 \log \left(1 + \frac{1}{n^7} \right) :$$

- (a) è divergente
- (b) è equivalente alla successione $b_n = \frac{1}{n}$
- (c) è illimitata
- (d) ha lo stesso limite della successione $c_n = \left(1 + \frac{1}{n^7} \right)^{n^6}$.

11. La successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^7} \right)^{n^9} :$$

- (a) tende a e^2
- (b) ha lo stesso limite della successione $b_n = n^9 \log \left(1 + \frac{1}{n^7} \right)$
- (c) è equivalente alla successione $c_n = \frac{1}{n^2}$
- (d) tende a 1.

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (b).

Infatti, poiché $a_n = (-1)^n + n = n \pm 1$, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \geq 0$.

2. RISPOSTA ESATTA: (c).

Infatti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$ in quanto è prodotto di una successione infinitesima per una successione che, pur non avendo limite, si mantiene limitata.

La risposta (a) è falsa in quanto $\sin n$ può assumere valori anche negativi.

La risposta (d) è errata in quanto, ad esempio, il numero reale $\sin 1$ non è razionale.

3. RISPOSTA ESATTA: (b).

Infatti per $n \rightarrow \infty$ si ha $a_n = \frac{3^n - 5n}{2^n - n^2} \sim \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

4. RISPOSTA ESATTA: (a).

Infatti per $n \rightarrow \infty$ si ha $a_n = \frac{3n-1}{n^2} \sim \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$. Dunque le risposte (b), (c) e (d) sono errate.

La risposta (a) è esatta, poiché, se $n > m \geq 1$, si ha $a_n < a_m$. Infatti:

$$a_n - a_m = \frac{3n-1}{n^2} - \frac{3m-1}{m^2} = \frac{(m-n)(3mn-m-n)}{n^2m^2}$$

E' facile verificare che, $\forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq 1$, si ha $3mn > m+n$. Pertanto, nella nostra ipotesi, $a_n - a_m < 0$.

5. RISPOSTA ESATTA: (a).

Si ha infatti, razionalizzando:

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

(si è tenuto conto che, per $n \rightarrow \infty$, si ha $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$).

6. RISPOSTA ESATTA: (b).

Si ha infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1$$

7. RISPOSTA ESATTA: (c).

Infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n} \right) = 1$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \pm 1}{n} = 0$$

Dunque (a) e (b) sono false e (c) è vera.

La (d) è falsa, in quanto, per n pari, risulta $a_n > 1$.

8. RISPOSTA ESATTA: (a).

Infatti, razionalizzando:

$$a_n = n(\sqrt{n^4 + 1} - n^2) = \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1} + n^2} \sim \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

9. RISPOSTA ESATTA: (b).

Infatti:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

e dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$.

10. RISPOSTA ESATTA: (b).

Poiché, per $n \rightarrow \infty$, $\log\left(1 + \frac{1}{n^7}\right) \sim \frac{1}{n^7}$, si ha $a_n = n^6 \log\left(1 + \frac{1}{n^7}\right) \sim \frac{n^6}{n^7} = \frac{1}{n}$.

Dunque (b) è vera mentre (a) e (c) sono false.

La successione c_n si può scrivere in forma esponenziale:

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n^7} \right)^{n^6} = e^{n^6 \log\left(1 + \frac{1}{n^7}\right)} = e^{a_n}.$$

Pertanto $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

11. RISPOSTA ESATTA: (b).

Analogamente a quanto fatto nel precedente test, scriviamo in forma esponenziale $a_n = e^{n^9 \log\left(1 + \frac{1}{n^7}\right)} = e^{b_n}$.

Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, si avrà anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Dunque (b) è vera mentre (a) e (d) sono false.

Per $n \rightarrow \infty$, si ha $b_n \sim \frac{n^9}{n^7} = n^2$ e quindi $a_n \sim e^{n^2}$. Pertanto (c) è falsa.