SUCCESSIONI
Esercizi risolti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{3/2}+1}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{1+3^n} \qquad d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$$

$$e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{(n+1)(n+2)} \qquad f)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{\sqrt{n}-\log n}$$

$$g)\ \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1} \qquad h)\ \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n+1}$$

$$i)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n} \qquad \ell)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2+1}}$$

$$m)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3^n-3^{-n})}{4^n+n^2} \qquad n)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^6+\log n+3^n}{2^n+n^4+\log^5 n}$$

$$o)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n \qquad p)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

$$q)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}} \qquad r)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}$$

$$s)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n \qquad t)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\log n}$$

$$u)\ \lim_{n\to\infty}n^2\,2^{-\sqrt{n}} \qquad v)\ \lim_{n\to\infty}\left(n^{\sqrt{n}}-2^n\right).$$

2. Verificare che per $n\to\infty$

$$a)\ \frac{(n+3)!-n!}{(n+1)!}\sim n^2 \qquad b)\ \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}.$$

3. Calcolare la parte principale per $n\to\infty$ di

$$a)\ \binom{2n-1}{3} \qquad b)\ \frac{\sqrt{n}-2n^3+n\log n}{5n+\log n}.$$

4. Sia d_n una successione convergente a $l\in\mathbb{R}$, e sia $a_n=(-1)^n\,d_n$. Studiare l'esistenza del $\lim_{n\to\infty}a_n$ al variare di l in $\mathbb{R}$.
5. Dimostrare che 3^n é un infinito di ordine inferiore a $n!$ per $n\to\infty$.

Soluzioni

1. a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3}=e^{2/3}.$$

Possiamo anche procedere utilizzando il limite fondamentale $\lim_{n\to\infty}(1+a/n)^n=e^a$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n}\right]^{2}=(e^{1/3})^2=e^{2/3}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{3/2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{1+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3^n}(-1+(\frac{2}{3})^n)}{\cancel{3^n}(1+\frac{1}{3^n})}=-1.$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(1+\frac{n^2}{2^n})}{3^n(1+\frac{n^3}{3^n})}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\,\log n}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\log n}{n^{\cancel{2}}}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0.$$

f)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{\sqrt{n}-\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}\frac{1+\frac{1}{\log n}}{1-\frac{\log n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}=0.$$

g) Il limite vale zero perche la successione $(-1)^n$ è limitata mentre $\frac{n}{n^2+1}$ è infinitesima.

h) Il limite non esiste perchè la successione dei termini di indice pari tende a $+\infty$, mentre quella dei termini di indice dispari tende a $-\infty$. Se il limite esistesse ($=l$) queste due successioni dovrebbero invece tendere entrambe a l (vedi anche esercizio 4). Notiamo che non è sufficiente dire che "$(-1)^n$ è oscillante e $\frac{n^2+1}{n+1}$ tende a $+\infty$" per concludere che il limite non esiste. Per esempio la successione $a_n=((-1)^n+5)\,n$ tende a $+\infty$ perchè $a_n\geq 4n\ \forall n$, pur essendo il prodotto di una successione oscillante per una successione infinita.

i)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=3.$$

l)
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^2\,\sqrt[n]{3+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

m)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3^n-3^{-n})}{4^n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 3^n(1-3^{-2n})}{4^n(1+\frac{n^2}{4^n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(4/3)^n}=0.$$

n)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+\log n+3^n}{2^n+n^4+\log^5 n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(1+\frac{n^6}{3^n}+\frac{\log n}{3^n})}{2^n(1+\frac{n^4}{2^n}+\frac{\log^5 n}{2^n})}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty.$$

o)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}}=e^2.$$

p)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=(e^{-1})^{+\infty}=0,$$
essendo $1/e<1$.

q)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=e^0=1.$$

r) Si ha
$$\frac{\log(n+1)}{\log n}=\frac{\log[n(1+\frac{1}{n})]}{\log n}=\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n},$$
e dunque
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\log n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=1.$$

s)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n=0^{+\infty}=0.$$

t) È facile verificare che per ogni $n\geq 3$ vale $1\leq\log n\leq n$. Moltiplicando per n abbiamo che $n\leq n\log n\leq n^2$, e dunque
$$\sqrt[n]{n}\leq\sqrt[n]{n\log n}\leq(\sqrt[n]{n})^2,\quad\forall n\geq 3.$$

Ricordando che $\sqrt[n]{n} \to 1$ e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \log n} = 1.$$

u) Si ha

$$n^2\, 2^{-\sqrt{n}} = e^{2\log n - \sqrt{n}\log 2} = e^{\sqrt{n}(-\log 2 + 2\frac{\log n}{\sqrt{n}})} \to e^{-\infty} = 0.$$

v) Si ha

$$n^{\sqrt{n}} - 2^n = e^{\sqrt{n}\log n} - e^{n\log 2} = -e^{n\log 2}\left(1 - e^{\sqrt{n}\log n - n\log 2}\right).$$

Ora

$$e^{\sqrt{n}\log n - n\log 2} = e^{n\left(-\log 2 + \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)} \to e^{-\infty} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{\sqrt{n}} - 2^n\right) = -\lim_{n\to\infty} e^{n\log 2} = -\infty.$$

2. a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)! - n!}{n^2(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1) - 1}{n^2(n+1)} = 1.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \log e = 1.$$

3. a) Si ha

$$\binom{2n-1}{3} = \frac{(2n-1)!}{3!(2n-4)!} = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} \sim \frac{4}{3}n^3.$$

b)

$$\frac{\sqrt{n} - 2n^3 + n\log n}{5n + \log n} = -\frac{2n^3}{5n}\,\frac{1 - \frac{\sqrt{n}}{2n^3} - \frac{\log n}{2n^2}}{1 + \frac{\log n}{5n}} \sim -\frac{2}{5}n^2.$$

4. È facile verificare dalla definizione di limite che una successione a_n tende a $l \in \mathbb{R}^*$ se e solo se le due successioni dei termini di indice pari e di indice dispari, $b_n = a_{2n} = \{a_0, a_2, a_4, \dots\}$ e $c_n = a_{2n+1} = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}$, tendono entrambe a l. Nel nostro caso $a_{2n} \to l$ mentre $a_{2n+1} \to -l$. Quindi se $l = -l$ cioè $l = 0$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; se invece $l \neq 0$ il limite di a_n non esiste.
5. Scrivendo per esteso $3^n/n!$ possiamo effettuare la seguente maggiorazione:

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3\cdot 3\cdots 3}{1\cdot 2\cdots n} = 3\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{3}{n-1}\cdot\frac{3}{n} \leq 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{n} = \frac{27}{2n}.$$

Passando al limite per $n\to\infty$ e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0.$$