

## SUCCESSIONI

### Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n/2}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + e^n}{2^n}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^4 + 5}$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n}{n+1}$$

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{\log n + \cos n}$$

$$m) \lim_{n \rightarrow \infty} [(\sqrt{n})^n - 3^n]$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n - 7}{n^2 + 2n + 2}\right)^{5n}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n}{\pi^n}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \log n + \sqrt{n}(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n^2) - (\log n)^2)$$

$$\ell) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n} \sin(n!)$$

$$n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}.$$

2. Verificare che per  $n \rightarrow \infty$

$$a) \log(n^3 + \sin n) \sim \log(n^3 + n^2)$$

$$b) (2n+1)^n \sim \sqrt{e} 2^n n^n.$$

3. Calcolare la parte principale per  $n \rightarrow \infty$  di

$$a) \frac{n^4 + 3}{n} - \frac{n^4 + 3n}{n-2}$$

$$b) \frac{n\sqrt{n+1} + \sin n}{3n^{2/3} + \log n}.$$

4. Dire se esiste il limite per  $n \rightarrow \infty$  della successione  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ .

5. Sia per  $n \geq 2$ ,

$$a_n = \frac{(1 + \sin \alpha)^n}{\left(1 + \frac{\sin \alpha}{n}\right)^n}.$$

Calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  al variare di  $\alpha$  nell'intervallo  $[0, 2\pi)$ .

## Soluzioni

1. a)  $e^{-3/2}$ ; b)  $e^5$ ; c)  $+\infty$ ; d) 0; e) 1; f) 0; g)  $-1$ ; h)  $-\infty$ ; i)  $+\infty$ ; l) 0; m)  $+\infty$ ; n)  $+\infty$ .

2. a) Si ha

$$\frac{\log(n^3 + \sin n)}{\log(n^3 + n^2)} = \frac{\log \left[ n^3 \left( 1 + \frac{\sin n}{n^3} \right) \right]}{\log \left[ n^3 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]} = \frac{\log(n^3) + \log \left( 1 + \frac{\sin n}{n^3} \right)}{\log(n^3) + \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)},$$

da cui raccogliendo sopra e sotto  $\log(n^3)$  e passando al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^3 + \sin n)}{\log(n^3 + n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\log(n^3)} \log \left( 1 + \frac{\sin n}{n^3} \right)}{1 + \frac{1}{\log(n^3)} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = 1.$$

b)

$$\frac{(2n+1)^n}{2^n n^n} = \left( \frac{2n+1}{2n} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n \rightarrow e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

3. a)  $-2n^2$ ; b)  $\frac{n^{5/6}}{3}$ .

4. Il limite proposto non esiste. Infatti la successione  $a_{2n}$  tende a 1, mentre  $a_{2n+1}$  tende a  $-1$ .

5. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in (0, \pi) \\ 0 & \text{se } \alpha \in (\pi, 2\pi) \\ 1 & \text{se } \alpha = 0, \pi. \end{cases}$$