**SUCCESSIONI**

Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n/2}$ $\qquad$ $b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-7}{n^2+2n+2}\right)^{5n}$

$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+e^n}{2^n}$ $\qquad$ $d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 3^n}{\pi^n}$

$e)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^4+5}$ $\qquad$ $f)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}\log n+\sqrt{n}(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$

$g)\ \lim_{n\to\infty} n\log\frac{n}{n+1}$ $\qquad$ $h)\ \lim_{n\to\infty}\left(\log(n^2)-(\log n)^2\right)$

$i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sin n}{\log n+\cos n}$ $\qquad$ $\ell)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\sin(n!)$

$m)\ \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n}\right)^n-3^n\right]$ $\qquad$ $n)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}.$

2. Verificare che per $n\to\infty$

$a)\ \log(n^3+\sin n)\sim\log(n^3+n^2)$ $\qquad$ $b)\ (2n+1)^n\sim\sqrt{e}\,2^n\,n^n.$

3. Calcolare la parte principale per $n\to\infty$ di

$a)\ \frac{n^4+3}{n}-\frac{n^4+3n}{n-2}$ $\qquad$ $b)\ \frac{n\sqrt{n+1}+\sin n}{3n^{2/3}+\log n}.$

4. Dire se esiste il limite per $n\to\infty$ della successione $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$.
5. Sia per $n\geq 2$,

$$a_n=\frac{(1+\sin\alpha)^n}{(1+\frac{\sin\alpha}{n})^n}.$$

Calcolare $\lim_{n\to\infty}a_n$ al variare di $\alpha$ nell'intervallo $[0,2\pi)$.

## Soluzioni

1. a) $e^{-3/2}$; b) $e^5$; c) $+\infty$; d) 0; e) 1; f) 0; g) $-1$; h) $-\infty$; i) $+\infty$; l) 0; m) $+\infty$; n) $+\infty$.

2. a) Si ha

$$\frac{\log(n^3+\sin n)}{\log(n^3+n^2)} = \frac{\log\left[n^3\left(1+\frac{\sin n}{n^3}\right)\right]}{\log\left[n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]} = \frac{\log(n^3)+\log\left(1+\frac{\sin n}{n^3}\right)}{\log(n^3)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

da cui raccogliendo sopra e sotto $\log(n^3)$ e passando al limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^3+\sin n)}{\log(n^3+n^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\log(n^3)}\log\left(1+\frac{\sin n}{n^3}\right)}{1+\frac{1}{\log(n^3)}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

b)
$$\frac{(2n+1)^n}{2^n\,n^n} = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \to e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

3. a) $-2n^2$; b) $\frac{n^{5/6}}{3}$.

4. Il limite proposto non esiste. Infatti la successione $a_{2n}$ tende a 1, mentre $a_{2n+1}$ tende a $-1$.

5. Si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha\in(0,\pi) \\ 0 & \text{se } \alpha\in(\pi,2\pi) \\ 1 & \text{se } \alpha = 0,\pi. \end{cases}$$