

6 novembre 2001

MODELLO di COMPITO di ANALISI MATEMATICA I - SOLUZIONE

Esercizio 1

E' data la funzione $f(x) = \sqrt{1 + 4x - 4x^2} - 2 \sin x + 4x^2 - 1$.

a) Trovare lo sviluppo del 3 ordine di MacLaurin di f

Ricordando lo sviluppo

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$$

ricaviamo:

$$[(1 + (4x - 4x^2))]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(4x - 4x^2) - \frac{1}{8}(4x - 4x^2)^2 + \frac{1}{16}(4x - 4x^2)^3 + o(x^3) = 1 + 2x - 4x^2 + 8x^3 + o(x^3).$$

Sostituendo in $f(x)$ questa espressione (insieme con lo sviluppo di $\sin x$) troviamo

$$f(x) = 1 + 2x - 4x^2 + 8x^3 - 2\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^3) + 4x^2 - 1 = \frac{25}{3}x^3 + o(x^3).$$

b) Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$ per $x_0 \rightarrow 0$

L'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x_0 \rightarrow 0$ è 3 e la sua parte principale è la funzione $p(x) = \frac{25}{3}x^3$, ad essa equivalente per $x \rightarrow 0$.

c) Dire se converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x} \sin^3 x} dx$$

Per $x \rightarrow 0$, si ha

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x} \sin^3 x} \sim \frac{\frac{25}{3}x^3}{\sqrt{x} \cdot x^3} = \frac{25}{3\sqrt{x}}.$$

Poiché l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche l'integrale proposto.

Esercizio 2

E' data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}.$$

a) Trovarne il dominio, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti obliqui

Il dominio di f è tutto \mathbf{R} . $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La retta $y = x - \frac{1}{3}$ è l' asintoto obliquo (destro e sinistro) di f ; infatti

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - x^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1$$
$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-t} - 1}{t} = -\frac{1}{3}$$

b) Calcolare la derivata prima di f , indicarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 2x) = \frac{1}{3} \frac{x(3x - 2)}{\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = \frac{1}{3} \frac{3x - 2}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}.$$

$f'(x) = 0$ se $x = \frac{2}{3}$, mentre $f'(x) \rightarrow \infty$ se $x \rightarrow 0$;
 $f'(x) < 0$ se $x \in (0, \frac{2}{3})$;
 $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0)$ e se $x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$.

Dunque

f è monotona crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e nell'intervallo $(\frac{2}{3}, +\infty)$;

f è monotona decrescente nell'intervallo $(0, \frac{2}{3})$;

il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo a tangente verticale;

il punto $x = \frac{2}{3}$ è un punto di minimo relativo a tangente orizzontale.

c) Tracciare un grafico qualitativo di f . d) Trovare gli eventuali punti di non derivabilità di f .

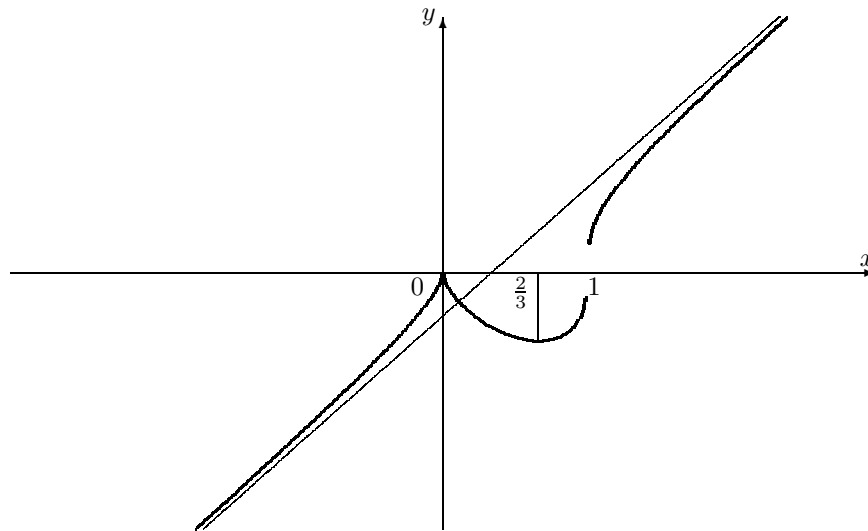


Figure 1: Grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

f non è derivabile nei punti $x = 0$ e $x = 1$. Per vedere che tipo di punti (a tangente verticale) sono, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} f'(x) = +\infty.$$

Pertanto il punto $x = 0$ è un punto di cuspidi mentre il punto $x = \frac{2}{3}$ è un punto di flesso a tangente verticale.

e) Dire se possibile trovare lo sviluppo di MacLaurin di f , e fino a che ordine.

Poiché f non è derivabile in $x = 0$ (ma è definita in tale punto), l'unico sviluppo di MacLaurin che si può scrivere è quello di ordine 0, cioè $f(x) = 0 + o(x)$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x+3}$. Sull'intervallo $I=[-3, 7]$:

a) $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange: VERO FALSO PERCHE':

Questo è VERO. Infatti f è continua sull'intervallo chiuso $[-3, 7]$ e derivabile sull'intervallo aperto $(-3, 7)$.

b) $f(x)$ non soddisfa le ipotesi del teorema dei valori intermedi: VERO FALSO PERCHE':

Questo è FALSO. Infatti f è continua sull'intervallo chiuso $[-3, 7]$. Dunque soddisfa l'ipotesi del teorema dei valori intermedi.

Esercizio 4

Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ e l'asse delle x , per $x \in [-1, 2]$.

Poiché $f(x) \geq 0$ sull'intervallo $[-1, 2]$, l'area A richiesta è data dall'integrale definito

$$A = \int_{-1}^2 x^2 e^{-|x|} dx = \int_{-1}^0 x^2 e^x dx + \int_0^2 x^2 e^{-x} dx.$$

Calcoliamo per parti

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x dx) = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

Operando la sostituzione $-x = t$ troviamo

$$\int x^2 e^{-x} dx = - \int t^2 e^t dt = -e^t(t^2 - 2t + 2) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k.$$

Pertanto

$$A = |e^x(x^2 - 2x + 2)|_{-1}^0 + |-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)|_0^2 = [2 - e^{-1}(1 + 2 + 2)] + [-e^{-2}(4 + 4 + 2) + 2] = 4 - 5e^{-1} - 10e^{-2}.$$

Esercizio 5

Dire (MOTIVANDO OPPORTUNAMENTE LA RISPOSTA) in quale di queste situazioni l'integrale improprio

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ **SICURAMENTE NON CONVERGE:**

a) se f non è continua sull'intervallo $[1, +\infty)$

b) se f non è positiva

c) se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

d) se f non è limitata sull'intervallo $[1, +\infty)$.

L'unico caso in cui SICURAMENTE l'integrale improprio di f non converge è il caso c).

Infatti, per definizione di limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \iff \forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon.$$

Dunque, scegliendo $\epsilon = 1$, si ha

$$\exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) > 2.$$

Poiché l'integrale improprio $\int_M^{+\infty} 2 dx$ diverge, per il criterio del confronto anche l'integrale improprio $\int_M^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Pertanto

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^M f(x) dx + \int_M^{+\infty} f(x) dx$$

sicuramente non converge.

PARTE TEORICA

Argomento: **Minimo globale e locale. Teorema di Fermat**

- Definire che cosa è un punto di minimo globale e locale di una funzione.
- Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat nel caso di un punto di minimo relativo.
- Servendosi di esempi e controesempi (anche grafici), mostrare che le ipotesi sono tutte indispensabili per la validità del teorema.