Nome e Cognome (stampatello).. **MATRICOLA**............**CORSO PROF.**.......................

6 novembre 2001

MODELLO di COMPITO di ANALISI MATEMATICA I - SOLUZIONE

Esercizio 1

E' data la funzione $f(x) = \sqrt{1 + 4x - 4x^2} - 2\sin x + 4x^2 - 1.$

a) Trovare lo sviluppo del 3 *ordine di MacLaurin di* f

Ricordando lo sviluppo

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

ricaviamo:

$$[(1 + (4x - 4x^2)]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(4x - 4x^2) - \frac{1}{8}(4x - 4x^2)^2 + \frac{1}{16}(4x - 4x^2)^3 + o(x^3) = 1 + 2x - 4x^2 + 8x^3 + o(x^3).$$

Sostituendo in $f(x)$ questa espressione (insieme con lo sviluppo di $\sin x$) troviamo

$$f(x) = 1 + 2x - 4x^2 + 8x^3 - 2\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^3) + 4x^2 - 1 = \frac{25}{3}x^3 + o(x^3).$$

b) Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$ *per* $x_0 \to 0$

L'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x_0 \to 0$ è 3 e la sua parte principale è la funzione $p(x) = \frac{25}{3}x^3$, ad essa equivalente per $x \to 0$.

c) Dire se converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}\sin^3 x}\,dx$$

Per $x \to 0$, si ha

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}\sin^3 x} \sim \frac{\frac{25}{3}x^3}{\sqrt{x}\cdot x^3} = \frac{25}{3\sqrt{x}}.$$

Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche l'integrale proposto.

Esercizio 2

E' data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}.$$

a) Trovarne il dominio , comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti obliqui

Il dominio di f è tutto $\mathbf{R}$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La retta $y = x - \frac{1}{3}$ è l' asintoto obliquo (destro e sinistro) di f; infatti

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - x^2}{x^3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 - t} - 1}{t} = -\frac{1}{3}$$

b) Calcolare la derivata prima di f, indicarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 2x) = \frac{1}{3} \frac{x(3x - 2)}{\sqrt[3]{x^4(x - 1)^2}} = \frac{1}{3} \frac{3x - 2}{\sqrt[3]{x(x - 1)^2}}.$$

$f'(x) = 0$ se $x = \frac{2}{3}$, mentre $f'(x) \to \infty$ se $x \to 0$;
$f'(x) < 0$ se $x \in (0, \frac{2}{3})$;
$f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0)$ e se $x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$.

Dunque
f è monotona crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e nell'intervallo $(\frac{2}{3}, +\infty)$;
f è monotona decrescente nell'intervallo $(0, \frac{2}{3})$;
il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo a tangente verticale;
il punto $x = \dfrac{2}{3}$ è un punto di minimo relativo a tangente orizzontale.

c) Tracciare un grafico qualitativo di f. d) Trovare gli eventuali punti di non derivabilità di f .

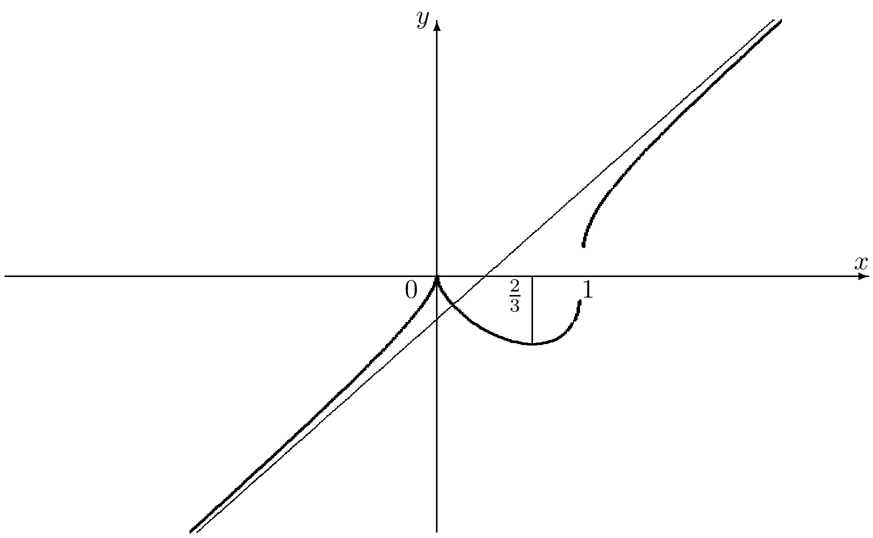

Figure 1: Grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

f non è derivabile nei punti $x = 0$ e $x = 1$. Per vedere che tipo di punti (a tangente verticale) sono, calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty \ ; \qquad \lim_{x \to \frac{2}{3}^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{2}{3}^+} f'(x) = +\infty.$$

Pertanto il punto $x = 0$ è un punto di cuspide mentre il punto $x = \frac{2}{3}$ è un punto di flesso a tangente verticale.

e) Dire se possibile trovare lo sviluppo di MacLaurin di f , e fino a che ordine.

Poiché f non è derivabile in $x = 0$ (ma è definita in tale punto), l'unico sviluppo di McLaurin che si può scrivere è quello di ordine 0, cioè $f(x) = 0 + o(x)$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x+3}$. *Sull'intervallo I=*$[-3, 7]$ *:*

a) $f(x)$ *soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange:* $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ PERCHE':

Questo è VERO. Infatti f è continua sull'intervallo chiuso $[-3, 7]$ e derivabile sull'intervallo aperto $(-3, 7)$.

b) $f(x)$ *non soddisfa le ipotesi del teorema dei valori intermedi:* $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ PERCHE':

Questo è FALSO. Infatti f è continua sull'intervallo chiuso $[-3, 7]$. Dunque soddisfa l'ipotesi del teorema dei valori intermedi.

Esercizio 4

Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ *e l'asse delle* x*, per* $x \in [-1, 2]$.

Poiché $f(x) \geq 0$ sull'intervallo $[-1, 2]$, l'area A richiesta è data dall'integrale definito

$$A = \int_{-1}^{2} x^2 e^{-|x|}\, dx = \int_{-1}^{0} x^2 e^{x}\, dx + \int_{0}^{2} x^2 e^{-x}\, dx.$$

Calcoliamo per parti

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\, dx = x^2 e^x - (2xe^x - \int 2e^x\, dx) = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

Operando la sostituzione $-x = t$ troviamo

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -\int t^2 e^t\, dt = -e^t(t^2 - 2t + 2) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k.$$

Pertanto

$$A = \left| e^x(x^2 - 2x + 2) \right|_{-1}^{0} + \left| -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) \right|_{0}^{2} = [2 - e^{-1}(1+2+2)] + [-e^{-2}(4+4+2) + 2] = 4 - 5e^{-1} - 10e^{-2}.$$

Esercizio 5

Dire (MOTIVANDO OPPORTUNAMENTE LA RISPOSTA) in quale di queste situazioni l'integrale improprio $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ **SICURAMENTE NON CONVERGE***:*

a) se f *non è continua sull'intervallo* $[1, +\infty)$

b) se f *non è positiva*

c) se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

d) se f *non è limitata sull'intervallo* $[1, +\infty)$.

L'unico caso in cui SICURAMENTE l'integrale improprio di f non converge è il caso c).
Infatti, per definizione di limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \iff \forall \epsilon > 0\, \exists M > 0 :\; x > M \;\Rightarrow\; |f(x) - 3| < \epsilon.$$

Dunque, scegliendo $\epsilon = 1$, si ha

$$\exists M > 0 :\; x > M \;\Rightarrow\; f(x) > 2.$$

Poiché l'integrale improprio $\int_{M}^{+\infty} 2\, dx$ diverge, per il criterio del confronto anche l'integrale improprio $\int_{M}^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.
Pertanto

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{1}^{M} f(x)\, dx + \int_{M}^{+\infty} f(x)\, dx$$

sicuramente non converge.

PARTE TEORICA

Argomento: **Minimo globale e locale. Teorema di Fermat**

- Definire che casa un punto di minimo globale e locale di una funzione.
- Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat nel caso di un punto di minimo relativo.
- Servendosi di esempi e controesempi (anche grafici), mostrare che le ipotesi sono tutte indispensabili per la validità del teorema.