LIMITI E CONFRONTO LOCALE

Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x}{x^2+1-2x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3-8x^2-18x-9}$$

$$c)\ \lim_{x\to\pm\infty} 2x-\sqrt{4x^2+x} \qquad d)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x$$

$$e)\ \lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \qquad f)\ \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$$

$$g)\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2} \qquad h)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2+x^3}-\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}\right)$$

$$i)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x} \qquad l)\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$$

$$m)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x-\mathrm{tg}\ x}{x^3} \qquad n)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$$

$$o)\ \lim_{x\to2^-}\frac{\cos\frac{\pi}{4}x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad p)\ \lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\sin(4x)}$$

$$q)\ \lim_{x\to+\infty} x\ \sin\frac{1}{x} \qquad r)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x-\cos x}{x}$$

$$s)\ \lim_{x\to0^+}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)-3}{x} \qquad t)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(3-\cos x)}.$$

2. Dire se esistono (ed eventualmente calcolare) i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} x^3\,(1+\sin x) \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} x^3\,(2+\sin x)$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x+x^3\sin^2 x\right) \qquad d)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x+x^3\sin x\right).$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e}{x}\right)^{-x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1+2x)}{\sin x} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1}{x^2}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+2x}-1}{x} \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2})^x-1}{2x+\sin x}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\sin x}{\log x} \qquad h)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\log^3 x-e^x}{3e^{-x}+5e^x-x^{10}}$$

$$i)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\log^2 x\,\sin x} \qquad j)\ \lim_{x\to 0^\pm}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$$

$$k)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\sin\left(e^{-x}\sin x\right)}{x} \qquad l)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5 3^x+2^x}{x^4 4^x+3^x}$$

$$m)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}\right)^{x+3} \qquad n)\ \lim_{x\to 1} x^{-\frac{1}{\log x}}$$

$$o)\ \lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \qquad p)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\operatorname{tg}^4 x\right)}{e^{2\sin^4 x}-1}$$

$$q)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2} \qquad r)\ \lim_{x\to+\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

$$s)\ \lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{x+3}{x}\right) \qquad t)\ \lim_{x\to 0}\left(3\cdot 2^x-2\cdot 3^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$u)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\sin x}-1}{x} \qquad v)\ \lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(e+\frac{1}{x}\right)\right]^x$$

$$x)\ \lim_{x\to 0^+}(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}} \qquad y)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{9+\sin\left(2^x-1\right)}-3\right)$$

$$w)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}} \qquad z)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\sqrt{x^2-1}}{\log\left(x+3\sqrt{x^2-1}\right)}.$$

4. Verificare che $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$ e $g(x)=x-1$ sono infiniti dello stesso ordine per $x\to+\infty$ e determinare $k\in\mathbb{R}$ tale che $f(x)\sim k\,g(x)$ $(x\to+\infty)$.

5. Confrontare tra loro gli infiniti x^3 e $\sqrt[3]{x^8-7x^2}$ per $x\to+\infty$.

6. a) Verificare che se $f(x)$ è infinitesima per $x\to x_0$, allora $\sin f(x)\sim f(x)$ $(x\to x_0)$.
   b) Dedurne che $\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ è infinitesima dello stesso ordine di $\frac{1}{x}$ per $x\to+\infty$.

7. Calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale kx^α rispetto a x per $x\to 0$

delle seguenti funzioni:

$a)\ e^{\frac{x}{x+1}} - 1$ $\qquad$ $b)\ 1 - \cos^3(2x)$

$c)\ \log(1 + \operatorname{tg}^3 x)$ $\qquad$ $d)\ \sqrt{4 - 3x^2} - 2$

$e)\ \sqrt{\cos x} - 1$ $\qquad$ $f)\ \sqrt[n]{1+x} - \sqrt[m]{1-x}$

$g)\ \dfrac{x^{3/2} + 5x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ $h)\ \sqrt[3]{1 + 2\sin^2 x} - \cos x$

$i)\ \dfrac{\cos x}{1 + x^2} - 1$ $\qquad$ $l)\ \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sqrt{x}} - 1$

$m)\ \log\left(\sqrt{x^2 + 9}\right) - \log 3$ $\qquad$ $n)\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{\cos x} - 1\right).$

8. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $\frac{k}{x^\alpha}$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$a)\ \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^{3/2} + 5x^2}$ $\qquad$ $b)\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$

$c)\ \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ $\qquad$ $d)\ \sqrt{x^2 + \sqrt{x}} - x + \dfrac{1}{x}$

$e)\ \log\left(e + \dfrac{3}{x}\right) - 1$ $\qquad$ $f)\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

9. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $k(x-x_0)^\alpha$ rispetto a $x - x_0$ per x che tende al valore indicato x_0 delle seguenti funzioni:

$a)\ \sin x \quad (x \to \pi)$ $\qquad$ $b)\ \cos x \quad (x \to \pi/2)$

$c)\ \sqrt{x} - 1 \quad (x \to 1)$ $\qquad$ $d)\ \sqrt{1 + 2x} - \sqrt{5} \quad (x \to 2)$

$e)\ (x^2 - 1)\left(1 - \sin\dfrac{\pi}{2}x\right) \quad (x \to 1)$ $\qquad$ $f)\ \log\left(\sqrt{x+7} - 2\right) \quad (x \to 2).$

10. Determinare l'ordine di infinito α e la parte principale kx^α rispetto a x per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$a)\ \log\left(e^{2x} + 3\right)$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+1}} - x^3 + \sqrt{x}.$

11. Determinare a in modo che la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + x}{3x^2 - ax + 1}$$

abbia $y = \frac{1}{3}x + 2$ come asintoto obliquo.

12. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$$a)\ f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad\qquad b)\ f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}.$$

13. Dire se esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2x^3 + \sin x}{\sqrt{2 + x^6 - \cos x}\; e^{\sin^2 x}}.$$

14. Confrontare fra loro i seguenti infinitesimi per $x \to 0^+$ mettendoli in ordine crescente di infinitesimo:

$$2^{-\frac{1}{x^2}},\ x^2,\ x\sqrt{x},\ \frac{x}{\log x},\ x^2 \log x,\ e^{-\frac{1}{x}},\ x \log^2 x,\ \frac{\sin x}{\sqrt{x}},\ \frac{x^2}{\log x},\ x^{\frac{1}{x}},\ \frac{e^{x^2} - 1}{x}.$$

Soluzioni

1.

$a)\ -\dfrac{1}{2}$ $b)\ \dfrac{3}{8}$ $c)\ \begin{cases} -\infty & \text{per } x \to -\infty, \\ -\frac{1}{4} & \text{per } x \to +\infty \end{cases}$

$d)\ -1$ $e)\ 2\sqrt{3}$ $f)\ 1$

$g)\ -\dfrac{1}{12}$ $h)\ -\dfrac{2}{3}$ $i)\ 1$

$l)\ -\dfrac{1}{2}$ $m)\ -\dfrac{1}{2}$ $n)\ 3$

$o)\ 0$ $p)\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $q)\ 1$

$r)\ 0$ $s)\ -\infty$ $t)\ 0.$

2.

$a)$ non esiste $\left(x_n = 2n\pi,\ \ x'_n = \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi,\ \ f(x_n) \to +\infty,\ \ f(x'_n) \to 0 \right)$

$b)\ +\infty\ \ \big((x^3(2+\sin x) \geq x^3\ \ \forall x \in \mathbb{R}\big)$

$c)\ +\infty\ \ \big(x + x^3 \sin^2 x \geq x\ \ \forall x > 0\big)$

$d)$ non esiste $\left(x_n = 2n\pi,\ \ x'_n = \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi,\ \ f(x_n) \to +\infty,\ \ f(x'_n) \to -\infty \right).$

3.

$a)\ e^e$ $b)\ e^{3/2}$ $c)\ \dfrac{2}{\log 3}$

$d)\ \log 3$ $e)\ \dfrac{2}{n}$ $f)\ \dfrac{\log 2}{6}$

$g)\ 1$ $h)\ -\dfrac{1}{5}$ $i)\ 0$

$j)\ \begin{cases} 1 & \text{per } x \to 0^+ \\ 1/3 & \text{per } x \to 0^- \end{cases}$ $k)\ 0$ $l)\ +\infty$

$m)\ e^3$ $n)\ \dfrac{1}{e}$ $o)\ \sqrt{e}$

$p)\ -\dfrac{1}{2}$ $q)\ -\dfrac{1}{2}$ $r)\ \log 2$

$s)\ 3$ $t)\ \dfrac{8}{9}$ $u)\ -\infty$

$v)\ e^{1/e}$ $x)\ e$ $y)\ \dfrac{\log 2}{6}$

$w)\ 1$ $z)\ \dfrac{1}{3}.$

4. Si verifica subito che $f(x) \sim \sqrt{2}\, g(x)$ $(x \to +\infty)$.
5. L'infinito $\sqrt[3]{x^8 - 7x^2} \sim x^{8/3}$ $(x \to +\infty)$ ha ordine $8/3 < 3$.
6. a) Infatti facendo il cambio di variabile $f(x) = t$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b) Essendo

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \sim \frac{1}{2x} \quad (x \to +\infty),$$

si ha

$$\sin(\sqrt{x^2+1} - x) \sim \frac{1}{2x} \quad (x \to +\infty)$$

per il punto a).

7.

$a)\ x$ $\qquad b)\ 6x^2$ $\qquad c)\ x^3$

$d)\ -\frac{3}{4}x^2$ $\qquad e)\ -\frac{1}{4}x^2$ $\qquad f)\ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)x$

$g)\ x^{7/6}$ $\qquad h)\ \frac{7}{6}x^2$ $\qquad i)\ -\frac{3}{2}x^2$

$l)\ x^{1/2}$ $\qquad m)\ \frac{1}{18}x^2$ $\qquad n)\ -\frac{1}{8}x^2.$

8.

$a)\ \frac{1}{5x^{3/2}}$ $\qquad b)\ \frac{2}{x}$ $\qquad c)\ \frac{2}{3x^{2/3}}$

$d)\ \frac{1}{2x^{1/2}}$ $\qquad e)\ \frac{3}{ex}$ $\qquad f)\ -\frac{1}{8x^{3/2}}.$

9.

$a)\ -(x-\pi)$ $\qquad b)\ -(x-\frac{\pi}{2})$ $\qquad c)\ \frac{1}{2}(x-1)$

$d)\ \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2)$ $\qquad e)\ \frac{\pi^2}{4}(x-1)^3$ $\qquad f)\ \frac{1}{6}(x-2).$

10.

$a)\ 2x$ $\qquad b)\ -\frac{1}{2}x.$

11. $a = \frac{9}{2}$.

12. a) $\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -1) \bigcup (0, +\infty)$. La retta $y = e$ è asintoto orizzontale completo per f. La retta $x = -1$ è asintoto verticale per f.

b) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. La retta $y = x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo destro per f. La retta $y = -x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo sinistro per f.

13. Il limite non esiste. Infatti posto $f(x) = \frac{x - 2x^3 + \sin x}{\sqrt{2 + x^6} - \cos x e^{\sin^2 x}}$, consideriamo le due successioni $x_n = n\pi$ e $x'_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, che divergono a $+\infty$. Essendo $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -2$ e $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = -\frac{2}{e}$, il limite non esiste.

14. In ordine crescente di infinitesimo per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}},\ x\log^2 x,\ \frac{e^{x^2}-1}{x}\ \frac{x}{\log x},\ x\sqrt{x},\ x^2\log x, x^2,\ \frac{x^2}{\log x},\ e^{-\frac{1}{x}},\ x^{\frac{1}{x}},\ 2^{-\frac{1}{x^2}}.$$