

LIMITI E CONFRONTO LOCALE

Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1 - 2x^3} & b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9} \\ c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + x} & d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + x} \\ e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} & f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x} \\ g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{x - 2} & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{2 + x^3} - \sqrt[3]{1 + 2x^2 + x^3} \right) \\ i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} & l) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \\ m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} & n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} \\ o) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\cos \frac{\pi}{4} x}{\sqrt{4 - x^2}} & p) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sin(4x)} \\ q) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} & r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x} \\ s) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x} & t) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(3 - \cos x)}. \end{array}$$

2. Dire se esistono (ed eventualmente calcolare) i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (1 + \sin x) & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (2 + \sin x) \\ c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x^3 \sin^2 x) & d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x^3 \sin x). \end{array}$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e}{x}\right)^{-x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1 + 2x)}{\sin x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sin x}{\log x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\log^2 x \sin x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin(e^{-x} \sin x)}{x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x + 1}\right)^{x+3}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{x+3}{x}\right)$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}$$

$$x) \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{\log x}}$$

$$w) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2})^x - 1}{2x + \sin x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \log^3 x - e^x}{3e^{-x} + 5e^x - x^{10}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 3^x + 2^x}{x^4 4^x + 3^x}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} x^{-\frac{1}{\log x}}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \operatorname{tg}^4 x)}{e^{2 \sin^4 x} - 1}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} (3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\log\left(e + \frac{1}{x}\right)\right]^x$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt{9 + \sin(2^x - 1)} - 3\right)$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \sqrt{x^2 - 1}}{\log(x + 3\sqrt{x^2 - 1})}$$

4. Verificare che $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ e $g(x) = x - 1$ sono infiniti dello stesso ordine per $x \rightarrow +\infty$ e determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \sim k g(x)$ ($x \rightarrow +\infty$).

5. Confrontare tra loro gli infiniti x^3 e $\sqrt[3]{x^8 - 7x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$.

6. a) Verificare che se $f(x)$ è infinitesima per $x \rightarrow x_0$, allora $\sin f(x) \sim f(x)$ ($x \rightarrow x_0$).

b) Dedurre che $\sin(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ è infinitesima dello stesso ordine di $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$.

7. Calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale kx^α rispetto a x per $x \rightarrow 0$

delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) e^{\frac{x}{x+1}} - 1 & b) 1 - \cos^3(2x) \\
 c) \log(1 + \operatorname{tg}^3 x) & d) \sqrt{4 - 3x^2} - 2 \\
 e) \sqrt{\cos x} - 1 & f) \sqrt[n]{1+x} - \sqrt[m]{1-x} \\
 g) \frac{x^{3/2} + 5x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & h) \sqrt[3]{1 + 2\sin^2 x} - \cos x \\
 i) \frac{\cos x}{1 + x^2} - 1 & l) \frac{1 + \sin x}{1 - \sqrt{x}} - 1 \\
 m) \log(\sqrt{x^2 + 9}) - \log 3 & n) \operatorname{arctg}(\sqrt[4]{\cos x} - 1).
 \end{array}$$

8. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $\frac{k}{x^\alpha}$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^{3/2} + 5x^2} & b) \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \\
 c) \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} & d) \sqrt{x^2 + \sqrt{x}} - x + \frac{1}{x} \\
 e) \log\left(e + \frac{3}{x}\right) - 1 & f) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.
 \end{array}$$

9. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $k(x-x_0)^\alpha$ rispetto a $x-x_0$ per x che tende al valore indicato x_0 delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) \sin x \quad (x \rightarrow \pi) & b) \cos x \quad (x \rightarrow \pi/2) \\
 c) \sqrt{x} - 1 \quad (x \rightarrow 1) & d) \sqrt{1+2x} - \sqrt{5} \quad (x \rightarrow 2) \\
 e) (x^2 - 1)\left(1 - \sin \frac{\pi}{2}x\right) \quad (x \rightarrow 1) & f) \log(\sqrt{x+7} - 2) \quad (x \rightarrow 2).
 \end{array}$$

10. Determinare l'ordine di infinito α e la parte principale kx^α rispetto a x per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) \log(e^{2x} + 3) & b) \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} - x^3 + \sqrt{x}.
 \end{array}$$

11. Determinare a in modo che la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + x}{3x^2 - ax + 1}$$

abbia $y = \frac{1}{3}x + 2$ come asintoto obliquo.

12. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$$a) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad b) f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}.$$

13. Dire se esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^3 + \sin x}{\sqrt{2 + x^6} - \cos x e^{\sin^2 x}}.$$

14. Confrontare fra loro i seguenti infinitesimi per $x \rightarrow 0^+$ mettendoli in ordine crescente di infinitesimo:

$$2^{-\frac{1}{x^2}}, x^2, x\sqrt{x}, \frac{x}{\log x}, x^2 \log x, e^{-\frac{1}{x}}, x \log^2 x, \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \frac{x^2}{\log x}, x^{\frac{1}{x}}, \frac{e^{x^2} - 1}{x}.$$

Soluzioni

1.

a) $-\frac{1}{2}$	b) $\frac{3}{8}$	c) $\begin{cases} -\infty & \text{per } x \rightarrow -\infty, \\ -\frac{1}{4} & \text{per } x \rightarrow +\infty \end{cases}$
d) -1	e) $2\sqrt{3}$	f) 1
g) $-\frac{1}{12}$	h) $-\frac{2}{3}$	i) 1
l) $-\frac{1}{2}$	m) $-\frac{1}{2}$	n) 3
o) 0	p) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$	q) 1
r) 0	s) $-\infty$	t) 0 .

2.

a) non esiste $\left(x_n = 2n\pi, x'_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi, f(x_n) \rightarrow +\infty, f(x'_n) \rightarrow 0 \right)$
 b) $+\infty$ $\left((x^3(2 + \sin x) \geq x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}) \right)$
 c) $+\infty$ $\left(x + x^3 \sin^2 x \geq x \quad \forall x > 0 \right)$
 d) non esiste $\left(x_n = 2n\pi, x'_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi, f(x_n) \rightarrow +\infty, f(x'_n) \rightarrow -\infty \right)$.

3.

a) e^e	b) $e^{3/2}$	c) $\frac{2}{\log 3}$
d) $\log 3$	e) $\frac{2}{n}$	f) $\frac{\log 2}{6}$
g) 1	h) $-\frac{1}{5}$	i) 0
j) $\begin{cases} 1 & \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ 1/3 & \text{per } x \rightarrow 0^- \end{cases}$	k) 0	l) $+\infty$
m) e^3	n) $\frac{1}{e}$	o) \sqrt{e}
p) $-\frac{1}{2}$	q) $-\frac{1}{2}$	r) $\log 2$
s) 3	t) $\frac{8}{9}$	u) $-\infty$
v) $e^{1/e}$	x) e	y) $\frac{\log 2}{6}$
w) 1	z) $\frac{1}{3}$.	

4. Si verifica subito che $f(x) \sim \sqrt{2}g(x)$ ($x \rightarrow +\infty$).
 5. L'infinito $\sqrt[3]{x^8 - 7x^2} \sim x^{8/3}$ ($x \rightarrow +\infty$) ha ordine $8/3 < 3$.
 6. a) Infatti facendo il cambio di variabile $f(x) = t$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b) Essendo

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \sim \frac{1}{2x} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

si ha

$$\sin(\sqrt{x^2 + 1} - x) \sim \frac{1}{2x} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

per il punto a).

7.

a) x	b) $6x^2$	c) x^3
d) $-\frac{3}{4}x^2$	e) $-\frac{1}{4}x^2$	f) $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)x$
g) $x^{7/6}$	h) $\frac{7}{6}x^2$	i) $-\frac{3}{2}x^2$
l) $x^{1/2}$	m) $\frac{1}{18}x^2$	n) $-\frac{1}{8}x^2$.

8.

a) $\frac{1}{5x^{3/2}}$	b) $\frac{2}{x}$	c) $\frac{2}{3x^{2/3}}$
d) $\frac{1}{2x^{1/2}}$	e) $\frac{3}{ex}$	f) $-\frac{1}{8x^{3/2}}$.

9.

a) $-(x - \pi)$	b) $-(x - \frac{\pi}{2})$	c) $\frac{1}{2}(x - 1)$
d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2)$	e) $\frac{\pi^2}{4}(x - 1)^3$	f) $\frac{1}{6}(x - 2)$.

10.

a) $2x$	b) $-\frac{1}{2}x$.
---------	----------------------

11. $a = \frac{9}{2}$.

12. a) $\text{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. La retta $y = e$ è asintoto orizzontale completo per f . La retta $x = -1$ è asintoto verticale per f .
- b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. La retta $y = x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo destro per f . La retta $y = -x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo sinistro per f .
13. Il limite non esiste. Infatti posto $f(x) = \frac{x - 2x^3 + \sin x}{\sqrt{2 + x^6} - \cos x e^{\sin^2 x}}$, consideriamo le due successioni $x_n = n\pi$ e $x'_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, che divergono a $+\infty$. Essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -2$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = -\frac{2}{e}$, il limite non esiste.
14. In ordine crescente di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, x \log^2 x, \frac{e^{x^2} - 1}{x} \frac{x}{\log x}, x\sqrt{x}, x^2 \log x, x^2, \frac{x^2}{\log x}, e^{-\frac{1}{x}}, x^{\frac{1}{x}}, 2^{-\frac{1}{x^2}}.$$