INTEGRALI

Test di autovalutazione

1. Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$, e F una primitiva di f tale che $F(2) = 5$. Allora:
   (a) esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - f(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$
   (b) $F(x) = \int_2^x f(t)\ dt$
   (c) F non è derivabile in $x_0 = 2$
   (d) $F(x) = 5 + \int_2^x f(t)\ dt$

2. Sia $I = [a, b]$, $(a < b)$ e sia f una funzione continua su I. Allora:
   (a) Può esistere una primitiva di f su I che ha un punto angoloso
   (b) f ha primitive su I.
   (c) $\int_a^b f(x)\ dx$ non è nullo.
   (d) esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \int_a^b f(x)\ dx$

3. Sia $F(x) = x^2 + e^x + 1$ una primitiva di $f(x)$. Allora:
   (a) $f(x) = \int_1^x F(t)\ dt$
   (b) $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$
   (c) Non esiste nessun valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$
   (d) $f(x) = 2x + e^x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$

4. Sia $F(x) = \int_1^x \sinh t\, dt$. Allora:
   (a) $F'(1) = 0$
   (b) $F'(1) = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$
   (c) F non è derivabile in $x_0 = 1$
   (d) F non è continua in $x_0 = 0$

5. E' data la funzione integrale $F(x) = \int_5^x \cosh\sqrt{t^2 - 9}\ dt$. Allora:
   (a) $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{\cosh 4}$
   (b) la tangente al grafico di F nel punto $x_0 = 5$ ha equazione $y = 5 + (\cosh 4)(x - 5)$
   (c) F ha un punto critico in $x_0 = 5$
   (d) F è invertibile su $\mathbb{R}$

6. La funzione integrale $F(x) = \int_0^x (t^3 - 4t)\ dt$:
   (a) è sempre crescente
   (b) ha un punto di minimo in $x_0 = 2$
   (c) ha un punto di massimo assoluto in $x_0 = 0$
   (d) non si annulla mai

7. Se $A = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^5}\, dx$, allora:
   (a) $A = 2\int_0^1 \sqrt[3]{x^5}\, dx$
   (b) $A = 0$
   (c) $A = \frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}}$
   (d) $A = x\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2}\, dx$

8. L'area A della regione di piano compresa tra le curve $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ vale:
   (a) $A = \frac{1}{3}$
   (b) $A = \frac{2}{3}$
   (c) $A = \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})\, dx$
   (d) $A = 1$

9. L'area A compresa tra il grafico di $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ e l'asse delle x, $x \in [-2, 0]$, vale:
   (a) $A = -1$
   (b) $A = \int_0^{-2} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\, dx$
   (c) non è limitata
   (d) $A = 2$

10. Siano $f(x) = x^3 + 1, x \in [-1, 1]$ e μ il valor medio integrale di f su $[-1, 1]$. Allora
   (a) non esiste nessun valore c nell'intervallo $[-1, 1]$ per cui $f(c) = \mu$
   (b) $\mu = 2$
   (c) $\mu = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 + 1)\, dx$
   (d) $\mu = 1$

11. Sia $I = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$. Allora:
   (a) $I < 0$
   (b) $0 \leq I < 4$
   (c) $4 \leq I \leq 40$
   (d) $I > 40$

12. Sia $f(x) = x + 1,$ e sia μ il valor medio integrale di f su $[0, 2]$. Allora :
   (a) la funzione $g(x) = f(x) + 3$ ha lo stesso valor medio integrale su $[0, 2]$
   (b) $\mu = 4$
   (c) se $c = 1$ si ha $f(c) = \mu$
   (d) esiste un punto $c \in]0, 2[$ tale che $f(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

13. Sia $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{se } 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ \cos t & \text{se } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

   e sia $F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)\, dt$. Allora:
   (a) F è continua e derivabile in $\frac{\pi}{4}$
   (b) F è continua ma non derivabile in $\frac{\pi}{4}$
   (c) f non è né continua né derivabile in $\frac{\pi}{4}$
   (d) f è continua e derivabile in $\frac{\pi}{4}$

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (d).

   La risposta (a) è errata: si ha $f(x) = F'(x)$; non è detto pertanto che la differenza $F(x) - F'(x)$ sia costante.

   La risposta (c) è errata in quanto, essendo f continua su $\mathbb{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; dunque F è derivabile con derivata continua su $\mathbb{R}$.

   La risposta (b) è errata in quanto, se $F(x) = \int_2^x f(t)dt$, si ha $F(2) = 0$. Questa osservazione mostra anche che la risposta (d) è esatta, in quanto, se $F(x) = 5 + \int_2^x f(t)dt$, si ha $F(2) = 5$ (oltre a $F'(x) = f(x)$).

2. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, le funzioni $F(x) = \int_c^x f(t)dt$, al variare di $c \in [a, b]$, sono primitive di $f(x)$. Dunque la risposta (b) è esatta.

   La risposta (a) è errata, in quanto, se $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$ su I, si ha $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$; dunque, se f è continua su I, F è derivabile (con derivata continua) su I e non può avere punti angolosi.

   La risposta (c) è errata: come controesempio , si consideri la funzione $f(x) = \sin x$, sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

   La risposta (d) è errata: si consideri ad esempio la funzione $f(x) = 1$ sull'intervallo $[0, 2]$. (La risposta (d) sarebbe esatta se il valore dell'integrale definito fosse diviso per $b - a$, come afferma il teorema della media integrale).

3. RISPOSTA ESATTA: (c).

   La risposta (a) è errata: per definizione di primitiva, si ha $F'(x) = f(x)$, mentre dalla (a) si avrebbe (per il teorema fondamentale) $f'(x) = F(x)$.

   La risposta (b) è errata: infatti $F(1) = 2 + e$, mentre, se fosse $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$, si avrebbe $F(1) = 0$.

   La risposta (c) è esatta, in quanto $F(x)$ non si annulla per nessun valore di $a \in \mathbb{R}$.

   La (d) è errata, in quanto $f(x) = F'(x) = 2x + e^x$.

4. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Infatti, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F'(x) = \sinh x$ e dunque $F'(1) = \sinh(1) = \frac{e-e^{-1}}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$. Dunque (b) è vera mentre (a) è falsa .

   La risposta (c) è errata, in quanto, poiché $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su $\mathbb{R}$ e f è continua , F è derivabile (con derivata continua) su $\mathbb{R}$ e dunque anche in $x_0 = 1$.

   Lo stesso ragionamento prova che $F(x)$ è derivabile, e dunque continua, in $x_0 = 0$; pertanto la (d) è falsa.

5. RISPOSTA ESATTA: (a).

   Infatti $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(5)}$, in quanto $F(5) = 0$. Inoltre $F'(x) = \cosh\sqrt{x^2-9}$ e dunque $F'(5) = \cosh\sqrt{25-9} = \cosh 4$. Dunque (a) è vera e (c) è falsa, perché $F'(5) \neq 0$.

   La tangente al grafico di F nel punto di ascissa $x_0 = 5$ è la retta di equazione $y = F(5) + F'(5)(x-5)$ e dunque $y = (\cosh 4)(x-5)$. Pertanto la risposta (b) è errata.

   La risposta (d) è errata: è vero che $F'(x) = \cosh\sqrt{x^2-9} > 0, \forall x \in$Dom$(F)$, ma Dom$(F) \neq \mathbb{R}$.

6. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Poiché $F(0) = 0$, la (d) è falsa. Inoltre esistono valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui $F(x) > 0$ (ad esempio, $F(10) > 0$). Quindi anche (c) è falsa.

   Si ha $F'(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$. Dunque i punti di ascissa $x = 0, x = \pm 2$ sono punti critici di F. Dallo studio del segno di F' e degli intervalli di monotonia di F si deduce che F è decrescente negli intervalli $]-\infty, -2[$ e $]0, 2[$; si ricava inoltre che il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo, mentre i punti $x = \pm 2$ sono punti di minimo relativo. Dunque (a) è falsa mentre (b) è vera.

7. RISPOSTA ESATTA: (b).

   La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ è dispari. Dunque (b) è esatta, mentre (a) e (c) sono errate.

   La (d) è errata, perché x non può essere portata fuori dal segno di integrazione.

8. RISPOSTA ESATTA: (a).

   La regione di piano è situata nel primo quadrante, delimitata sopra dalla curva $y = \sqrt{x}$ e sotto dalla parabola $y = x^2$. Pertanto la sua area si calcola come $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$, e vale $\frac{1}{3}$.

9. RISPOSTA ESATTA: (b).

La funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ è continua. Dunque l'area cercata è un valore finito. Pertanto (c) è falsa.

Si osservi che $f(x)$ assume valori negativi se $x \in [-2, 0]$. Pertanto l'area richiesta è data da $A = -\int_{-2}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\ dx = \int_{0}^{-2} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\ dx$. Dunque (b) è vera.

Eseguendo il calcolo, si trova:

$A = \int_{0}^{-2} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+2x^2}\right]_{0}^{-2} = 1$

Dunque (d) è falsa.

La risposta (a) è errata, in quanto un'area per definizione è un numero positivo.

10. RISPOSTA ESATTA: (d).

Per definizione, $\mu = \frac{1}{2}\ \int_{-1}^{1} f(x)dx$. Eseguendo il calcolo si trova $\mu = 1$. Pertanto (d) è vera, mentre (b) e (c) sono false.

La risposta (a) è errata, perché contraddice il teorema della media integrale.

11. RISPOSTA ESATTA: (c).

Se $x \in [0, 4]$, si ha $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$ e dunque $1 \leq e^{\sqrt{x}} \leq e^2$. Pertanto :

$\int_0^4\ 1\ dx \leq \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\ dx \leq \int_0^4\ e^2\ dx$ e dunque $4 \leq \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\ dx \leq 4e^2$.

Dunque (c) è vera mentre (a), (b) e (d) sono false.

12. RISPOSTA ESATTA: (c).

Per definizione $\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 (x+1)dx = 2 = f(1) \neq \frac{1}{2}\int_0^2 (x+3)dx$. Dunque (c) è vera mentre (a) e (b) sono false .

La risposta (d) è falsa in quanto $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = 1$. Ora $f(x) = 1$ se e solo se $x = 0$, mentre in $]\ 0, 2\ [$ il punto $x = 0$ non è compreso.

Si ricordi che, per il teorema di Lagrange, esiste invece un punto $c \in [0, 2]$ tale che $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$.

13. RISPOSTA ESATTA: (a).

La funzione $f(t)$ è continua su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ma non è derivabile in $x = \frac{\pi}{4}$. Dunque (c) e (d) sono false.

Essendo $f(t)$ continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione integrale $F(x)$ è derivabile (e dunque continua) in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dunque (a) è vera mentre (b) è falsa.