

INTEGRALI IMPROPRI

Test di autovalutazione

1. L'integrale improprio $\int_0^1 x^{-\frac{1}{5}} dx$:

- (a) vale $\frac{4}{5}$
- (b) diverge
- (c) vale $\frac{5}{4}$
- (d) è negativo.

2. L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{4+2x}{5x^3} dx$:

- (a) vale $-\frac{4}{5}$
- (b) diverge
- (c) vale $\frac{4}{5}$
- (d) tende a 0 .

3. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$:

- (a) vale 1
- (b) vale $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$
- (c) è indeterminato perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$ è una forma indeterminata
- (d) diverge.

4. L'integrale improprio $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$:

- (a) converge a 1
- (b) diverge perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln^2 x} = +\infty$
- (c) converge a $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln^2 x}$
- (d) non esiste, perché la funzione $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ non è definita in $x = 0$.

5. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$:

(a) diverge

(b) converge a $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+4x^2}$

(c) converge a $\frac{\pi}{4}$

(d) è uguale al valore del limite $\lim_{a \rightarrow +\infty} (\arctan 2a)$.

6. L'integrale improprio $\int_0^1 \log x \, dx$:

(a) diverge perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$

(b) converge a -1

(c) converge a 1

(d) è uguale al valore del seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln b - b)$.

7. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$:

(a) diverge

(b) converge a $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$

(c) converge a 1

(d) è indeterminato.

8. L'integrale improprio $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$:

(a) converge a $\sqrt{3}$

(b) diverge perché $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

(c) converge a 1

(d) diverge, perché la funzione integranda ha un asintoto verticale.

9. L'integrale improprio $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$:

(a) è uguale al valore del limite $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{6}} - 2\sqrt{\sin b}}$

(b) diverge

(c) converge a $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) è uguale al valore del limite $2 \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\sin b} \right)$.

10. Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \left(1 - \cos \frac{1}{t}\right) dt$$

- (a) è finito e positivo
- (b) non esiste
- (c) non è finito
- (d) vale $0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{t}\right)$

11. L'integrale $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}-3} dx$

- (a) ha un valore finito
- (b) diverge
- (c) rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$ e l'asse delle x , per $x \in [0, 9[$
- (d) è positivo

12. L'integrale improprio $\int_0^1 9x^{-\frac{1}{3}} dx$:

- (a) vale $\frac{27}{2}$
- (b) diverge
- (c) vale $\frac{1}{2}$
- (d) è negativo

13. Sia f una funzione continua sull'intervallo $I = [2, +\infty[$.

- (a) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ allora f è integrabile impropriamente su I
- (b) Se f non è integrabile impropriamente su I , neppure $|f|$ lo è
- (c) Se f è integrabile impropriamente su I , anche $|f|$ lo è
- (d) Se f è integrabile impropriamente su I , allora f ha ordine di infinitesimo $k > 1$ per $x \rightarrow +\infty$

14. L'area compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \frac{3}{5x^2}$ e l'asse delle x , per $x \in]a, b[$:

- (a) è finita se $]a, b[=]0, 1[$
- (b) non è finita se $]a, b[=]2, 3[$
- (c) non è finita se $]a, b[=]2, +\infty[$
- (d) vale $\frac{1}{5}$ se $]a, b[=]3, +\infty[$

15. L'integrale improprio $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x} dx$:

- (a) oscilla
- (b) converge
- (c) è nullo
- (d) è negativo

16. L'integrale improprio $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$:

- (a) vale 0
- (b) diverge
- (c) è indeterminato
- (d) è maggiore di 1

17. La funzione integrale: $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt$:

- (a) è dispari
- (b) non ha asintoti orizzontali
- (c) ha infiniti punti di massimo relativo
- (d) in $x = 0$ ha ordine di infinitesimo 3

18. L'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3-x} dx$:

- (a) è negativo
- (b) diverge perché la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x^3-x}$ è infinita di ordine 1 per $x \rightarrow 0$
- (c) è uguale a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^3-x}$
- (d) converge

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (c)

Infatti, usando la definizione di integrale improprio:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{5}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{5}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} \right]_t^1 = \frac{5}{4} \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 - t^{\frac{4}{5}}) = \frac{5}{4}.$$

2. RISPOSTA ESATTA: (c)

Infatti:

$$\int_1^{+\infty} \frac{4+2x}{5x^3} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \left(\frac{4}{5x^3} + \frac{2}{5x^2} \right) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^{-2}}{5 \cdot -2} + \frac{2x^{-1}}{5 \cdot -1} \right]_1^t = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

3. RISPOSTA ESATTA: (a)

Infatti, applicando la regola di integrazione per parti per calcolare l'integrale indefinito, si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x+1}{e^x} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t+1}{e^t} + 1 \right) = 1$$

4. RISPOSTA ESATTA: (a)

Infatti:

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x \log^2 x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x} \log^{-2} x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{\log^{-1} x}{-1} \right]_t^{\frac{1}{e}} = -\log^{-1} \frac{1}{e} = 1$$

5. RISPOSTA ESATTA: (c)

Infatti:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+4x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan(2x) \right]_0^t = \frac{\pi}{4}$$

6. RISPOSTA ESATTA: (b)

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \log x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [x \log x - x]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-1 - t \log t + t) = -1$$

7. RISPOSTA ESATTA: (c)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t} + 1) = 1$$

8. RISPOSTA ESATTA: (a)

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[\sqrt{x^2-1} \right]_t^2 = \lim_{t \rightarrow 1^+} (\sqrt{3} - \sqrt{t^2-1}) = \sqrt{3}$$

Le risposte (b) e (d) sono errate perché la presenza di un asintoto verticale non è sufficiente per concludere che l'integrale diverge.

9. RISPOSTA ESATTA: (d)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{\sin x} \right]_t^{\frac{\pi}{6}} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\sin \frac{\pi}{6}} - \sqrt{\sin t} \right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

10. RISPOSTA ESATTA: (a)

Studiamo il comportamento per $t \rightarrow +\infty$ di $f(t) = 1 - \cos \frac{1}{t}$. Poniamo $\frac{1}{t} = u$ e studiamo il comportamento, per $u \rightarrow 0^+$, di

$$g(u) = 1 - \cos u = 1 - \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \right) = \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Dunque, per $t \rightarrow +\infty$, $1 - \cos t \sim \frac{1}{2t^2}$.

Pertanto $f(t) \geq 0$; l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ è convergente (perché converge l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2} dt$) ed è positivo.

11. RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti, per $x \rightarrow 9$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+3}{x-9} \sim \frac{6}{x-9}$$

Poiché $\int_0^9 \frac{6}{x-9} dx$ diverge, per il criterio del confronto anche l'integrale $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}-3} dx$ diverge.

Pertanto (a) è errata e (b) è esatta.

(d) è errata perché, per $x \in [0, 9[$, $f(x) < 0$.

(c) è errata perché l'integrale improprio è divergente e comunque è una quantità negativa.

12. RISPOSTA ESATTA: (a)

$$\int_0^1 9x^{-\frac{1}{3}} dx = 9 \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = 9 \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_t^1 = 9 \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 - t^{\frac{2}{3}}) = \frac{27}{2}$$

13. RISPOSTA ESATTA: (b)

La risposta (a) è errata: ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è integrabile impropriamente su I, anche se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

La risposta (b) è esatta in quanto è la contronominale della proprietà che lega la assoluta integrabilità impropria con l'integrabilità impropria semplice, e afferma:

Se $|f|$ è integrabile impropriamente su I, allora f è integrabile impropriamente su I.

La risposta (c) è errata: ad esempio la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile impropriamente su I, mentre la funzione $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ non lo è.

La risposta (d) è errata: ad esempio la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile impropriamente su I, ma non ha ordine di infinitesimo $k > 1$ per $x \rightarrow +\infty$.

14. RISPOSTA ESATTA: (d)

La risposta (a) è errata perché $\int_0^1 \frac{3}{5x^2} dx$ è divergente.

La risposta (b) è errata perché $\int_2^3 \frac{3}{5x^2} dx$ è convergente.

La risposta (c) è errata perché $\int_2^{+\infty} \frac{3}{5x^2} dx$ è convergente.

La risposta (d) è esatta; infatti:

$$\int_3^{+\infty} \frac{3}{5x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_3^t \frac{3}{5x^2} dx = \frac{3}{5} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_3^t = \frac{3}{5} \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

15. RISPOSTA ESATTA: (b)

La risposta (a) è errata perché su $I = [3, +\infty[$ la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 \log x}$ è strettamente positiva.

La risposta (b) è esatta; infatti, applicando il criterio del confronto, osserviamo che, su I,

$\frac{1}{x^2 \log x} < \frac{1}{x^2}$ e l'integrale improprio $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è convergente.

Le risposte (c) e (d) sono errate per quanto detto in (a).

16. RISPOSTA ESATTA: (a)

La risposta (a) è esatta; infatti $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è una funzione dispari, gli estremi di integrazione sono simmetrici rispetto all'origine e l'integrale improprio $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ è convergente.

Di conseguenza le risposte (b), (c), (d) sono errate.

17. RISPOSTA ESATTA: (c)

La risposta (a) è errata perché la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ è dispari e dunque $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ è una funzione pari.

La risposta (b) è errata; infatti l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ è convergente, come si può verificare applicando il criterio del confronto: $\left(\frac{\sin t}{1+t^2} < \frac{1}{1+t^2} \text{ e } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ è convergente} \right)$. Ciò significa che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ è finito e dunque $F(x)$ ha un asintoto orizzontale destro.

La risposta (c) è esatta; infatti $F'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ e dunque $F(x)$ ha infiniti punti di massimo e minimo dove $\sin x$ si annulla.

La risposta (d) è errata perché:

$$F''(x) = \frac{\cos x(1+x^2) - 2x \sin x}{(1+x^2)^2}; \text{ dunque } F''(0) = 1 \text{ e lo sviluppo di McLaurin di } F(x) \text{ risulta}$$

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo di $F(x)$ per $x \rightarrow 0$ è 2.

18. RISPOSTA ESATTA: (d)

La risposta (a) è errata perché la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x^3-x} = \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x-1)}$

è positiva nell'intervallo $I = [2, +\infty[$.

La risposta (b) è errata; infatti il comportamento di $f(x)$ in $x = 0$ non interessa in quanto il punto $x = 0$ non appartiene all'intervallo di integrazione $I = [2, +\infty[$.

La risposta (c) è errata; infatti $\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{x+1}{x^3-x} dx$, ma non è uguale al limite della funzione integranda.

La risposta (d) è esatta; infatti, per $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)} \sim \frac{1}{x^2}$$

e l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è convergente.