INTEGRALI IMPROPRI

Esercizi proposti

1. Usando la definizione, calcolare i seguenti integrali impropri:

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ \mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^1 \log x\ \mathrm{d}x$ [1] , [−1]

   b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + xe^{-x}\right) dx$ $[1 + \frac{2}{e}]$

   c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx$ $[2\log(1 + \sqrt{2})]$

   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9}\, dx$ $[\frac{\pi}{\sqrt{5}}]$

   e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + x)}{x^{3/2}}\, dx$ $[2\pi]$

2. Verificare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolarne il valore:

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x + 1)^3}\, dx$$ $[\frac{1}{2}]$

3. Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ converge l'integrale improprio $I_n = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(x^2 - 1)^3} dx$.

   Calcolarlo per il più grande di essi. $[\ n \leq 1\ ;\ \frac{7}{36}]$

4. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri; se converge, calcolare b).

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha}\ \mathrm{d}x$ [conv. se $\alpha \in\ ]1, 2[$]

   (b) $\displaystyle\int_0^1 x \log\left|\frac{x}{x - 1}\right|\ dx$ $[\frac{1}{2}]$

5. Studiare la convergenza assoluta del seguente integrale improprio :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 - x - 1}\, dx$$ [conv. ass.]

6. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

a) $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-2}}\, dx$$ [conv.]

b) $$\int_0^{3} \frac{1-\cos x}{x^2 \sin\sqrt{x}}\, dx$$ [conv.]

c) $$\int_0^{12} \frac{1-\cos x}{x^2 \sin\sqrt{x}}\, dx$$ [div.]