

FUNZIONI ELEMENTARI

Test di autovalutazione

1. E' data la funzione $f(x) = \sin(2x - 5)$. Allora:

- (a) $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x - 5 \leq 1\}$
- (b) $\text{im}(f) = [-1, 1]$
- (c) f ha periodo $T = \pi - 5$
- (d) f ha periodo $T = 2\pi - 5$.

2. La funzione $f(x) = \sqrt{|x - 1| + 2x}$:

- (a) è iniettiva
- (b) è definita su \mathbb{R}
- (c) è suriettiva
- (d) non è invertibile .

3. E' data la funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log x}$. Allora:

- (a) $f^{-1}([-1, 1]) = [0, 1]$
- (b) non esiste $f^{-1}([-1, 1])$
- (c) $f^{-1}([-1, 1]) = f^{-1}([0, 1])$
- (d) $f^{-1}([-1, 1]) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 1 - \log x \leq 1\}$

4. E' data la funzione $f(x) = \log(x - \sqrt{x})$. Allora:

- (a) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}_+$
- (b) f non è iniettiva
- (c) $\text{im}(f) = \mathbb{R}$
- (d) f è pari.

5. L'inversa della funzione $f(x) = x^2 - x + 2$:

- (a) non esiste
- (b) è la funzione $g(x) = \frac{1 + \sqrt{4x - 7}}{2}$
- (c) è la funzione $x = y^2 - y + 2$
- (d) è la funzione $h(x) = \frac{1 \pm \sqrt{4x - 7}}{2}$.

6. Sono date le funzioni $f(x) = \sin x - 2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Allora:

- (a) $\text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$
- (b) $\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$
- (c) $\text{im}(f \circ g) = [0, 1]$
- (d) $\text{im}(g \circ f) = \emptyset$.

7. Sono date le funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x$. Allora:

- (a) $h = f \circ g$
- (b) $h = g \circ f$
- (c) $h/\mathbb{R}_+ = f \circ g$
- (d) $g \circ f = f \circ g$.

8. E' data la funzione $f(x) = \log(x - 2 - \sqrt{x^2 + 1})$. Allora:

- (a) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}_+$
- (b) $\text{dom}(f) = (2, +\infty)$
- (c) f non è mai definita
- (d) $\text{im}(f) = \mathbb{R}$

9. E' data la funzione $f(x) = \arcsin \frac{2x - 2}{x - 2}$. Allora:

- (a) $\text{dom}(f) = [-1, 1]$
- (b) $\text{dom}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- (c) $f^{-1}\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$
- (d) $f^{-1}\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{2x - 2}{x - 2} \leq \frac{\pi}{6}\right\}$.

10. Il più grande intervallo in cui la funzione $f(x) = \sqrt{|x + 1| - |2x - 1|}$ è invertibile :

- (a) è $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
- (b) è \mathbb{R}
- (c) f non è invertibile su nessun intervallo
- (d) è contenuto nell'intervallo $[-1, 1]$.

11. La funzione $h(x) = 2 \sin^2 x + \sin x - 1$:

- (a) è composta con la funzione $g(t) = 2t^2 + t - 1$
- (b) ha periodo π
- (c) è iniettiva
- (d) $h^{-1}([-1, 0]) = \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (b).

La funzione $\sin(2x-5)$ è composta della funzione $g(x) = 2x-5$, che ha come dominio e immagine \mathbb{R} , con la funzione $h(t) = \sin t$, che ha per dominio \mathbb{R} e per immagine $[-1, 1]$. Si avrà dunque $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{im}(f) = [-1, 1]$. Pertanto (a) è falsa e (b) è vera.

Poiché $\sin(2x-5) = \sin(2x)\cos 5 - \cos(2x)\sin 5$, un semplice calcolo mostra la funzione $f(x)$ ha lo stesso periodo della funzione $\sin(2x)$, cioè $T = \pi$. Dunque (c) e (d) sono false.

2. RISPOSTA ESATTA: (a).

$$\text{Si ha : } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{3x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Dunque il grafico di f è l'unione dei due archi di parabola ad asse orizzontale di equazioni $\{y = \sqrt{x+1}, -1 \leq x < 1\}$ e $\{y = \sqrt{3x-1}, x \geq 1\}$. Poiché sono due grafici di funzioni strettamente crescenti e f è continua, f risulta monotona crescente, dunque iniettiva e pertanto invertibile. Quindi (a) è vera mentre (d) è falsa.

Come visto sopra, $\text{dom}(f) = [-1, +\infty)$; inoltre f assume solo valori positivi. Dunque (b) e (c) sono false.

3. RISPOSTA ESATTA: (c).

Per definizione di controimmagine, e tenendo conto che la funzione radice assume solo valori positivi, si ha:

$$\begin{aligned} f^{-1}([-1, 1]) &= \{x \in \text{dom} f : -1 \leq \sqrt{1 - \log x} \leq 1\} = \\ &= \{x \in \text{dom} f : 0 \leq \sqrt{1 - \log x} \leq 1\} = \{x \in \text{dom} f : 0 \leq 1 - \log x \leq 1\} = f^{-1}([0, 1]). \end{aligned}$$

Dunque (d) è errata e (c) è esatta.

(a) è errata perché, se $x \in [0, 1]$ si ha $\sqrt{1 - \log x} \geq 1$.

(b) è errata, perché $f^{-1}([-1, 1]) \neq \emptyset$: infatti, ad esempio, $f(1) = 1$ e dunque $1 \in f^{-1}([-1, 1])$.

4. RISPOSTA ESATTA: (c).

Si ha: $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - \sqrt{x} > 0\} = (1, +\infty)$.

Dunque f non può essere pari. Pertanto le risposte (a) e (d) sono errate.

Invece la risposta (c) è esatta, in quanto f è continua e inoltre $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La risposta (b) è errata, perché f è iniettiva; infatti:

$$\begin{aligned} \log(a - \sqrt{a}) = \log(b - \sqrt{b}) &\iff a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b} \iff a - b = \sqrt{a} - \sqrt{b} \iff \\ &\iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b} \iff \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \vee \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1. \end{aligned}$$

Poiché a e b sono entrambi maggiori di 1, la seconda possibilità non sussiste; la prima possibilità implica che necessariamente sia $a = b$. Dunque f è iniettiva.

5. RISPOSTA ESATTA: (a).

La funzione $f(x) = x^2 - x + 2$ non è invertibile, perché non è iniettiva: dunque la risposta (a) è esatta ; la risposta (b) è errata: sarebbe esatta se si considerasse l'inversa non di f , ma della restrizione invertibile di f all'intervallo $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

L'equazione $x = y^2 - y + 2$ definisce la relazione il cui grafico è il simmetrico di f rispetto alla bisettrice $y = x$, e non è la funzione inversa di f . Dunque la risposta (c) è errata.

La risposta (d) è errata, in quanto $h(x)$ non è neppure una funzione (non è ad un sol valore).

6. RISPOSTA ESATTA: (d).

$$\text{Si ha : } (g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x - 2} \quad , \quad (f \circ g)(x) = \sin \sqrt{x} - 2.$$

Dunque $\text{dom}(g \circ f) = \text{im}(g \circ f) = \emptyset$, mentre $\text{dom}(f \circ g) = [0, +\infty)$, $\text{im}(f \circ g) = [-3, -1]$.

7. RISPOSTA ESATTA: (c).

Infatti, si ha :

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x| \quad , \quad \text{con } \text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R} ;$$
$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \quad , \quad \text{con } \text{dom}(f \circ g) = [0, +\infty).$$

8. RISPOSTA ESATTA: (c).

Si ha infatti: $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 - \sqrt{x^2 + 1} > 0\}$.

E' facile verificare (ad esempio graficamente) che, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 2 \leq \sqrt{x^2 + 1}$.

Dunque (c) è vera mentre (a) , (b) e (d) sono false.

9. RISPOSTA ESATTA: (c).

Si ha : $\text{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{2x-2}{x-2} \leq 1\right\} = \left[0, \frac{4}{3}\right]$. Dunque (a) e (b) sono false.

Per definizione :

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \arcsin \frac{2x-2}{x-2} \leq \frac{\pi}{6}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{2x-2}{x-2} \leq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{2}{3}, 1\right] .$$

Dunque (c) è vera mentre (d) è falsa.

10. RISPOSTA ESATTA: (a).

Si consideri preventivamente la funzione :

$$g(x) = |x + 1| - |2x - 1| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \leq -1 \\ 3x & \text{se } -1 < x < \frac{1}{2} \\ 2 - x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Dunque $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\} = [0, 2]$.

Poiché $g(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ e strettamente decrescente nell'intervallo $I_2 = [\frac{1}{2}, 2]$, e la funzione radice (dove esiste) conserva la monotonia del radicando, la funzione f sarà invertibile negli stessi intervalli I_1 e I_2 .

Pertanto la risposta (a) è esatta mentre le risposte (b), (c) e (d) sono errate.

11. RISPOSTA ESATTA: (a).

La funzione $h(x)$ risulta la composta della funzione $f(x) = \sin(x)$ con la funzione $g(t) = 2t^2 + t - 1$. Essa ha periodo 2π , e non è dunque iniettiva.

Pertanto (a) è vera mentre (b) e (c) sono false.

Data la periodicità di h , l'insieme delle controimmagini dell'intervallo $[-1, 0]$ comprende infiniti intervalli. Tra questi uno è proprio l'intervallo $[0, \frac{\pi}{6}]$, ma non è l'unico.

Dunque anche (d) è falsa.