FUNZIONI ELEMENTARI
Esercizi risolti

1. Discutendo graficamente la disequazione $2 - |x| > \sqrt{3+x}$, verificare che l'insieme delle soluzioni è un intervallo e trovarne gli estremi.

2. Rappresentare nel piano (x, y) l'insieme $\{(x, y) : x^2 < y \leq 2x + 2\}$.

3. Rappresentare nel piano (x, y) le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 2y \end{cases}$

4. Determinare $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2x+3} > 0\right\} \bigcap \left\{x \in \mathbb{R} : x + 1 > \sqrt{x^2 - 1}\right\}$.

5. Determinare il dominio di $f(x) = \log_3\big(2x - \sqrt{x^2 - 1}\big)$.

6. Determinare dominio ed immagine di $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$; disegnarne il grafico.

7. Sia $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}$; determinare il dominio, discutere eventuali simmetrie e l'iniettività.

8. Sia $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$; determinare la controimmagine $f^{-1}\big([2, +\infty)\big)$.

9. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - 4x + 9$ non è invertibile. Individuare opportune restrizioni di f che siano invertibili e scrivere l'espressione delle loro inverse.

10. Individuare opportune restrizioni di $f(x) = x^2 - 2|x|$ che siano invertibili. Specificare dominio ed immagine delle inverse, per le restrizioni trovate.

11. Provare che le funzioni
$$f(x) = x^2 - x + 1,\ x \geq \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}},\ x \geq \frac{3}{4}$$
sono una l'inversa dell'altra. Utilizzare la rappresentazione grafica di f e f^{-1} per risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$.

12. Siano
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}\,, \qquad g(x) = \sqrt{1-x}.$$
Disegnare i grafici di f e di g e determinare domini e immagini di $g \circ f$ e di $f \circ g$.

13. Data la funzione $h(x) = 2^{2x} - 2^x - 2$
    a) esprimere h come prodotto di composizione in cui uno dei fattori è la funzione $f(x) = 2^x$;
    b) determinare dominio ed immagine di h.

Soluzioni

1. L' unica intersezione della retta $r_1 : y = 2+x$ con la mezza parabola $P : y = \sqrt{3+x}$ è nel punto $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. L' intersezione della retta $r_2 : y = 2 - x$ con la mezza parabola $P : y = \sqrt{3+x}$ è nel punto $x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

   Disegnando i grafici, si vede che la disequazione è soddisfatta per i valori di x compresi tra x_1 e x_2, cioè per $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \ , \ \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$.

   Dunque gli estremi dell'intervallo sono $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

2. Si tratta della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = 2x+2$.

3. Si tratta dei punti della circonferenza unitaria che stanno al di sotto della retta $y = x/2$.

4. Consideriamo separatamente i due insiemi

   $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2x+3} > 0\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x+1 > \sqrt{x^2-1}\right\}$.

   Dobbiamo determinare l'insieme $A \cap B$.

   La disequazione $\dfrac{x-1}{2x+3} > 0$ è soddisfatta per $x < -\dfrac{3}{2} \vee x > 1$.

   Pertanto $A = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

   La disequazione $x + 1 > \sqrt{x^2-1}$ è equivalente al sistema di disequazioni

   $$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ (x+1)^2 > x^2 - 1 \end{cases} ,$$

   che è soddisfatto da tutti i valori di $x \geq 1$. Dunque $B = [1, +\infty)$.

   Pertanto $A \cap B = (1, +\infty)$.

5. $\mathrm{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \begin{cases} 2x - \sqrt{x^2-1} > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \right\}$

   Dunque dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni

   $$\begin{cases} 2x > 0 \\ 4x^2 > x^2 - 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

   Tale sistema è soddisfatto per ogni valore di $x \geq 1$.

   Pertanto $\mathrm{dom}(f) = [1, +\infty)$.

   Allo stesso risultato si può pervenire con una risoluzione grafica.

   La disequazione $2x - \sqrt{x^2-1} > 0$ è soddisfatta dalle ascisse dei punti della retta $y = 2x$ che stanno al di sopra dei punti della mezza iperbole equilatera $y = \sqrt{x^2-1}$. Disegnando i grafici e calcolando il punto di intersezione della retta con la mezza iperbole, si trovano i punti di ascissa $x \geq 1$.

6. $\mathrm{dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}:\sin x-1\geq 0\}$

   La disequazione $\sin x\geq 1$ è soddisfatta solo dai valori di x per cui $\sin x=1$, dunque dai valori $\left\{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   In corrispondenza a tali valori di x, si ha $f(x)=0$.

   Dunque $\mathrm{dom}(f)=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\mathrm{im}(f)=\{0\}$.

   Il grafico di f è pertanto l'insieme dei punti $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

7. $\mathrm{dom}(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\begin{cases}1-x\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases}\right\}$

   Tale sistema è verificato da ogni valore $-1\leq x\leq 1$.

   Pertanto $\mathrm{dom}(f)=[-1,1]$.

   Calcoliamo $f(-x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{-x+1}=f(x)$. Dunque f è pari e pertanto non è iniettiva. Il grafico di f risulta simmetrico rispetto all'asse delle y.

8. Dobbiamo risolvere la disequazione $\dfrac{x-1}{2-x}\geq 2$, che è equivalente alla disequazione $\dfrac{3x-5}{x-2}\leq 0$.

   Tale disequazione è soddisfatta per $\dfrac{5}{3}\leq x<2$.

   Pertanto $f^{-1}([2,+\infty))=[\frac{5}{3},2)$.

9. La funzione non è invertibile su $\mathbb{R}$ in quanto è una parabola con asse di simmetria la retta $x=2$ e dunque non è iniettiva. Il vertice della parabola è il punto V$=(2,5)$.

   Due restrizioni invertibili di f sono:

   $f_1=f|_{(-\infty,2]}:(-\infty,2]\to[5,+\infty)$,

   $f_2=f|_{[2,+\infty)}:[2,+\infty)\to[5,+\infty)$.

   Per ottenere le equazioni delle inverse, si deve ricavare x in funzione di y dall'equazione $y=x^2-4x+9$. L'equazione $x^2-4x+9-y=0$ ha soluzioni $x=2\pm\sqrt{y-5}$. Pertanto $f_1^{-1}(y)=2-\sqrt{y-5}$ e $f_2^{-1}(y)=2+\sqrt{y-5}$.

   Effettuando lo scambio delle variabili x e y si ottengono le espressioni delle due funzioni inverse $f_1^{-1}(x)=2-\sqrt{x-5}$ e $f_2^{-1}(x)=2+\sqrt{x-5}$.

10. Si ha $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & \text{se } x<0\\ x^2-2x, & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

    Abbiamo 4 restrizioni invertibili massimali di f:

    $f_1=f|_{(-\infty,-1]}:(-\infty,-1]\to[-1,+\infty)$

    $f_2=f|_{[-1,0]}:[-1,0]\to[-1,0]$

    $f_3=f|_{[0,1]}:[0,1]\to[-1,0]$

    $f_4=f|_{[1,+\infty)}:[1,+\infty)\to[-1,+\infty)$.

    Le inverse di tali restrizioni scambiano tra loro dominio e immagine.

11. Anzitutto si ha $\mathrm{dom}(f) = [\frac{1}{2}, +\infty) = \mathrm{im}(g)$, e $\mathrm{dom}(g) = [\frac{3}{4}, +\infty) = \mathrm{im}(f)$.

    Per provare che le funzioni f e g sono l'una l'inversa dell'altra, dobbiamo verificare che $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x \geq \frac{3}{4}$, e che $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \geq \frac{1}{2}$.

    $$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) + 1 = x$$

    $$(g \circ f)(x) = g(x^2 - x + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) = x$$

    Disegnando il grafico di f e di g si vede che la bisettrice $y = x$ è tangente ai grafici di f e g nel punto di ascissa 1, e che $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1$.

12. Il grafico di f è un'iperbole equilatera riferita agli asintoti, che sono le rette $x = -2$ e $y = 2$. Le intersezioni con gli assi cartesiani sono nei punti A$=\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e B$=\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

    Il grafico di g è una mezza parabola avente l'asse delle x come asse di simmetria e il vertice nel punto V$=(1, 0)$, rivolta verso la parte negativa dell'asse delle ascisse; l'intersezione con l'asse delle y è nel punto C$=(0, 1)$.

    Risulta pertanto:

    $\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

    $\mathrm{dom}(g) = (-\infty, 1]$, $\mathrm{Im}(g) = [0, +\infty)$

    Poiché $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = (-\infty, 1] \neq \emptyset$, esiste $g \circ f$ e si ha:

    $\mathrm{dom}(g \circ f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} \leq 1\right\} = (-2, 1]$

    $\mathrm{Im}(g \circ f) = g((-\infty, 1]) = [0, +\infty)$

    Pertanto si avrà:

    $g \circ f : (-2, 1] \to [0, +\infty)$.

    Poiché $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{dom}(f) = [0, +\infty) \neq \emptyset$, esiste $f \circ g$ e si ha:

    $\mathrm{dom}(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \wedge \sqrt{1 - x} + 2 \neq 0\right\} = (-\infty, 1]$

    $\mathrm{Im}(f \circ g) = f([0, +\infty)) = \left[\frac{1}{2}, 2\right)$

    Pertanto si avrà:

    $f \circ g : (-\infty, 1] \to \left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

13. a) Si ha $h(x) = (g \circ f)(x)$, dove $g(x) = x^2 - x - 2$.

    b) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(g) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

    Pertanto $\mathrm{dom}(h) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(h) = g(0, +\infty) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

    Dunque $h : \mathbb{R} \to \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.