FUNZIONI ELEMENTARI
Esercizi proposti

1. Risolvere la disequazione $x-2 \le \sqrt{x^2+1}$. [$\forall x \in \mathbb{R}$]

2. Disegnare i grafici di

   (a) $y = |x-1| + |2x+3|$;

   (b) $y = \big|2x^2 - |x-1|\big|$;

   (c) $y = \log_{10}\big(|x|+1\big)$.

3. Sia $f(x) = x^2 - x$; disegnare i grafici di $f(x)$, $\big|f(x)\big|$, $-f(x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$.

4. Sia $f(x) = \log(2-|x|) + \sqrt{1-x^2}$; determinare il dominio, discutere eventuali simmetrie e l'iniettività. [$\mathrm{dom}(f) = [-1,1]$; f pari; f non iniettiva]

5. Determinare il dominio di

$$f(x) = \sqrt{\log(2-x) - \log(x+1)} \qquad g(x) = \arcsin\big(2x - \sqrt{x+1}\big).$$

[$\mathrm{dom}(f) = \big(-1, \frac{1}{2}\big]$, $\mathrm{dom}(g) = \big[0, \frac{5}{4}\big]$]

6. Sia $f(x) = \log(2-|x|)$; determinare $f^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$. [$(-2,-1] \cup [1,2)$]

7. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x \le 1 \\ 4 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

determinare la controimmagine dell'intervallo $\big(\frac{1}{2}, 2\big)$.

$$\left[\quad f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 2\right)\right) = \left(\tfrac{1-\sqrt{13}}{2}, \tfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(2, \tfrac{7}{2}\right) \quad\right]$$

8. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - x - 1$ non è invertibile. Individuare opportune restrizioni di f che siano invertibili e scrivere l'espressione delle loro inverse.

$\Big[$ sono invertibili $f_1 = f/_{(-\infty,\frac{1}{2}]} : (-\infty, \frac{1}{2}] \to \big[-\frac{5}{4}, +\infty\big)$, $f_2 = f/_{[\frac{1}{2},+\infty)} : [\frac{1}{2}, +\infty) \to \big[-\frac{5}{4}, +\infty$

$\Big[f_1^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + x}$, $f_2^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + x} \Big]$

9. Determinare il più grande intervallo su cui

$$f(x) = \sqrt{1 - |x| + |x-1|}$$

è invertibile, disegnandone il grafico. Scrivere l'espressione della funzione inversa e disegnarne il grafico, specificandone dominio e immagine.

$$\left[\ f \text{ è invertibile su } [0,1].\ \ f^{-1} : [0, \sqrt{2}] \to [0,1]\ ,\ f^{-1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\ \right]$$

10. Verificare che $f(x) = (2x+1)(x - |x-1|)$, con dominio $[0, \infty)$, è iniettiva. Determinare l'immagine di f e la funzione inversa.

$$\left[\ \mathrm{Im} f = [-1, +\infty)\ ;\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}}{2} & \text{se } x \in [-1, 3] \\ \frac{x-1}{2} & \text{se } x \in (3, +\infty) \end{cases}\ \right]$$

11. Provare che le funzioni

$$f(x) = x^2 - 3x + 3,\quad x \geq \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{3}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}},\quad x \geq \frac{3}{4}$$

sono una l'inversa dell'altra. Utilizzare la rappresentazione grafica di f e f^{-1} per risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$. $[\ f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 3\ ]$

12. Siano

$$f(x) = x^2 + x - 2\,, \qquad g(x) = \log_{10}(1 - 2x).$$

Disegnare i grafici di f e g. Determinare dominio ed immagine di $g \circ f$ e di $f \circ g$.

$$\left[\ g \circ f\ :\ \left(\tfrac{-1-\sqrt{11}}{2}\ ,\ \tfrac{-1+\sqrt{11}}{2}\right) \to \left(-\infty\ ,\ \log_{10} \tfrac{11}{2}\right]\ ;\ f \circ g\ :\ \left(-\infty\ ,\ \tfrac{1}{2}\right) \to \left[-\tfrac{9}{4}\ ,\ +\infty\right)\ \right]$$