EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi proposti

1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

   (a) $xx' = 3t^2$ $\quad\left[\pm\sqrt{2t^3 + c}\right]$

   (b) $x' = tx + t$ $\quad\left[a\, e^{t^2/2} - 1\right]$

   (c) $tx' - 3x + 1 = 0$ $\quad\left[\frac{1}{3} + at^3\right]$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} (t^2+1)x' + tx = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\quad\left[1/\sqrt{t^2+1}\right]$

   (b) $\begin{cases} xx' = \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[\sqrt{2 - 2\cos t}\right]$

   (c) $\begin{cases} \tan(x') = t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[t \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]$

3. (a) Determinare a, b per cui $x(t) = t^2 + at + b$ è una soluzione di $tx'' - (t+2)x' + 2x = 0$. Trovare c per cui $x(t) = e^{ct}$ è una soluzione della stessa equazione. $\quad[a = b = 2,\ c = 1]$

   (b) Trovare k per cui $x(t) = t^k$ è una soluzione di $t^2x'' + 2tx' - 6x = 0$; determinare la soluzione $x(t)$ della stessa equazione per cui $x(1) = 1$ e $x'(1) = 0$ $\quad\left[(3t^2 + 2t^{-3})/5\right]$

4. Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari:

   (a) $tx' + x = t$ $\quad\left[\frac{1}{2}t + c/t\right]$

   (b) $tx' + (3t-1)x = 0$ $\quad\left[ate^{-3t}\right]$

   (c) $(t\ln t)x' + x = t$ $\quad[(t+c)/\ln t]$

5. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} tx' - 2x = t^4\cos t \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[t^3\sin t + t^2\cos t + t^2\right]$

   (b) $\begin{cases} x' + \dfrac{x}{t} = \dfrac{t}{t^2+1} \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\quad\left[1 + (\frac{1}{4}\pi - \arctan t)/t\right]$

   (c) $\begin{cases} x' + (\tan t)x = \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\quad[(t+1)\cos t]$

6. Determinare le soluzioni dei problemi

   (a) $\begin{cases} x'' - 5x' + 6x = 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[3e^{2t} - 2e^{3t}\right]$

   (b) $\begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1,\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0 \end{cases}$ $\quad\left[e^{-2t}\right]$

   (c) $\begin{cases} x'' - 6x' + 9x = 0 \\ x(0) = 1,\ x(1) = 1 \end{cases}$ $\quad\left[(1 - t + e^{-3}t)e^{3t}\right]$

   (d) $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1 \end{cases}$ $\quad\left[e^{-t}(\sin 2t + \cos 2t)\right]$

7. Determinare delle soluzioni particolari per le seguenti equazioni:

   (a) $x'' + 2x' + 5x = \cos 2t$ $\quad\big[$ad esempio $\frac{4}{17}\sin 2t + \frac{1}{17}\cos 2t\big]$

   (b) $x'' - 6x' + 9x = t + e^{3t}$ $\quad\big[\frac{2}{27} + \frac{1}{9}t + \frac{1}{2}t^2 e^{3t}\big]$

   (c) $x'' + x = t + e^t$ $\quad\big[t + \frac{1}{2}e^t\big]$

   (d) $x'' - 5x' - 6x + te^{-t} = 0$ $\quad\big[(\frac{1}{49}t + \frac{1}{14}t^2)e^{-t}\big]$

8. Risolvere i seguenti problemi :

   (a) $\begin{cases} x'' - 2x' + 2x = e^t \cos t \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \end{cases}$ $\quad\big[\frac{1}{2}t\,e^t \sin t\big]$

   (b) $\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = 3 - 3e^{-3t} \\ x(0) = 0,\ x(t) \text{ limitata su } [0, \infty) \end{cases}$ $\quad\big[-1 + (1 + \frac{3}{4}t)e^{-3t}\big]$