

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi proposti

1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

- (a) $xx' = 3t^2$ $[\pm\sqrt{2t^3 + c}]$
 (b) $x' = tx + t$ $[ae^{t^2/2} - 1]$
 (c) $tx' - 3x + 1 = 0$ $[\frac{1}{3} + at^3]$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $\begin{cases} (t^2 + 1)x' + tx = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $[1/\sqrt{t^2 + 1}]$
 (b) $\begin{cases} xx' = \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $[\sqrt{2 - 2\cos t}]$
 (c) $\begin{cases} \tan(x') = t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $[t \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2)]$

3. (a) Determinare a, b per cui $x(t) = t^2 + at + b$ è una soluzione di $tx'' - (t + 2)x' + 2x = 0$.
 Trovare c per cui $x(t) = e^{ct}$ è una soluzione della stessa equazione. $[a = b = 2, c = 1]$

(b) Trovare k per cui $x(t) = t^k$ è una soluzione di $t^2x'' + 2tx' - 6x = 0$; determinare la soluzione $x(t)$ della stessa equazione per cui $x(1) = 1$ e $x'(1) = 0$ $[(3t^2 + 2t^{-3})/5]$

4. Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali lineari:

- (a) $tx' + x = t$ $[\frac{1}{2}t + c/t]$
 (b) $tx' + (3t - 1)x = 0$ $[ate^{-3t}]$
 (c) $(t \ln t)x' + x = t$ $[(t + c)/\ln t]$

5. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $\begin{cases} tx' - 2x = t^4 \cos t \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$ $[t^3 \sin t + t^2 \cos t + t^2]$
 (b) $\begin{cases} x' + \frac{x}{t} = \frac{t}{t^2 + 1} \\ x(1) = 1 \end{cases}$ $[1 + (\frac{1}{4}\pi - \arctan t)/t]$
 (c) $\begin{cases} x' + (\tan t)x = \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $[(t + 1) \cos t]$

6. Determinare le soluzioni dei problemi

- (a) $\begin{cases} x'' - 5x' + 6x = 0, \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \end{cases}$ $[3e^{2t} - 2e^{3t}]$
 (b) $\begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \end{cases}$ $[e^{-2t}]$
 (c) $\begin{cases} x'' - 6x' + 9x = 0 \\ x(0) = 1, x(1) = 1 \end{cases}$ $[(1 - t + e^{-3t})e^{3t}]$
 (d) $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0 \\ x(0) = 1, x'(0) = 1 \end{cases}$ $[e^{-t}(\sin 2t + \cos 2t)]$

7. Determinare delle soluzioni particolari per le seguenti equazioni:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x'' + 2x' + 5x = \cos 2t \quad \left[\text{ad esempio } \frac{4}{17} \sin 2t + \frac{1}{17} \cos 2t \right] \\ \text{(b)} & x'' - 6x' + 9x = t + e^{3t} \quad \left[\frac{2}{27} + \frac{1}{9}t + \frac{1}{2}t^2 e^{3t} \right] \\ \text{(c)} & x'' + x = t + e^t \quad \left[t + \frac{1}{2}e^t \right] \\ \text{(d)} & x'' - 5x' - 6x + te^{-t} = 0 \quad \left[\left(\frac{1}{49}t + \frac{1}{14}t^2 \right) e^{-t} \right] \end{array}$$

8. Risolvere i seguenti problemi :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{cases} x'' - 2x' + 2x = e^t \cos t \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases} \quad \left[\frac{1}{2}t e^t \sin t \right] \\ \text{(b)} & \begin{cases} x'' + 2x' - 3x = 3 - 3e^{-3t} \\ x(0) = 0, x(t) \text{ limitata su } [0, \infty) \end{cases} \quad \left[-1 + \left(1 + \frac{3}{4}t\right)e^{-3t} \right] \end{array}$$