FUNZIONI - CONTINUITA' - DERIVABILITA'

Test di autovalutazione

1. Sia f una funzione derivabile e con derivata prima strettamente positiva in tutti i punti interni al suo dominio. Allora:
   (a) f non ha punti di massimo o di minimo
   (b) f è strettamente crescente nel suo dominio
   (c) f è suriettiva
   (d) f non ammette punti di flesso a tangente orizzontale

2. La funzione $f(x) = |x^3 - x|$:
   (a) non ha punti di minimo
   (b) è continua e derivabile
   (c) è pari
   (d) ha un punto di massimo assoluto

3. La funzione $f(x) = x^2 e^x$:
   (a) non ha asintoti
   (b) ha minimo assoluto
   (c) ad essa si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$
   (d) è invertibile

4. La funzione $f(x) = \frac{e^x}{|x|-1}$
   (a) non ha asintoti orizzontali
   (b) si può applicare ad f il teorema di Rolle in $[2, 5]$
   (c) è derivabile in $x_0 = 0$
   (d) è continua in $x_0 = 0$

5. La funzione $f(x) = \frac{e^x}{|x|-1}$
   (a) ha un punto di minimo relativo
   (b) non ha punti a tangente orizzontale
   (c) ha un punto di max relativo in $x_0 = -1$
   (d) si può applicare ad f il teorema di Lagrange in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$

6. La funzione $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$:
   (a) coincide con $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$
   (b) ha un punto di minimo assoluto
   (c) si può prolungare per continuità su $\mathbf{R}$
   (d) ad essa si può applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 2]$

7. La funzione $f(x) = \sin(\pi x)$
   (a) ha periodo 2π
   (b) ha tre intersezioni con la retta $y = x$
   (c) ha immagine $[-\pi, \pi]$
   (d) ha come tangente in 0 la retta $y = x$

8. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2 \end{cases}$
   (a) si può applicare ad f il teorema di Lagrange in $[0, 2]$
   (b) è derivabile su $\mathbb{R}$
   (c) non è continua in $x = 0$
   (d) ha un punto di minimo assoluto

9. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}(1 + e^x)$
   (a) è dispari
   (b) è derivabile su $\mathbb{R}$
   (c) è limitata
   (d) ha un punto a tangente verticale

10. Sia f definita su $[0, 1]$, continua e derivabile su $]0, 1[$, e tale che $f(0) = f(1)$. Allora:
   (a) esiste un punto $c \in]0, 1[$ tale che $f'(c) = 0$
   (b) ad f si può applicare il teorema di Lagrange sull'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$
   (c) f è continua sull'intervallo $[0, 1]$
   (d) ad f si può applicare il teorema di Rolle sull'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

11. Data $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{per } x \leq 0 \\ -3x - 2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$
   (a) $f'(x) = -3$, $\forall x \in \mathbb{R}$
   (b) f è dispari
   (c) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = -1$
   (d) la funzione f' è definita su $\mathbb{R} \backslash \{0\}$

12. Data $f(x) = |2x| - x$
   (a) f non è continua su $\mathbb{R}$
   (b) f ha un punto di minimo
   (c) esiste un intervallo in cui f è negativa
   (d) poichè $f(1) = f(-\frac{1}{3}) = 1$, esiste un punto $c \in \left]-\frac{1}{3}, 1\right[$ in cui $f'(c) = 0$

13. Sia f continua sull'intervallo $[-1, 1]$ tale che $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Allora:
   (a) se $f \in C^{(2)}(]-1, 1[)$ allora esiste almeno un punto $c \in]-1, 1[$ in cui $f''(c) = 0$
   (b) f è necessariamente derivabile in $]-1, 1[$
   (c) se $f(-\frac{1}{2}) > 0$ allora $f(\frac{1}{2}) < 0$
   (d) esiste un intervallo $[a, b] \subset]-1, 1[$ in cui f è strettamente decrescente.

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (d).

   Infatti, se $f'(x) > 0$, necessariamente $f'(x) \neq 0$ e dunque non esistono punti a tangente orizzontale (e quindi neppure flessi a tangente orizzontale).

   Per il teorema di Fermat, la funzione f non ha punti di massimo o minimo interni al suo dominio , ma potrebbe averli agli estremi (si pensi, ad esempio alla funzione $f(x) = \arcsin x$). Dunque (a) è falsa.

   Il fatto che f' sia strettamente positiva, non implica che f sia strettamente crescente, se il dominio di f non è un intervallo. Si pensi ad esempio alla funzione $f(x) = \frac{-1}{x}$. Pertanto (b) è falsa.

   La suriettività di una funzione non è legata al segno della sua derivata. Si consideri come controesempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan x$. Dunque (c) è falsa.

2. RISPOSTA ESATTA: (c).

   Infatti $f(-x) = |(-x)^3 - (-x)| = |-x^3 + x| = |x^3 - x| = f(x)$

   Poiché si ha $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x = 0$ oppure $x = \pm 1$, i punti $x = 0$, $x = \pm 1$ sono tre punti di minimo (assoluto). Dunque (a) è falsa.

   La funzione non ha invece punti di massimo assoluto, in quanto non è limitata superiormente. Dunque la (d) è falsa.

   (b) è falsa: $f(x)$ è continua (perché composizione di funzioni continue); però f non è derivabile nei punti $x = 0$, $x = \pm 1$: questi sono tre punti angolosi.

3. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Infatti si ha $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0$ se (e solo se) $x = 0$; dunque il punto $x = 0$ è un punto di minimo assoluto.

   La risposta (a) è errata, perché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (f ha un asintoto orizzontale).

   La risposta (c) è falsa , perché $f(-1) \neq f(1)$.

   Poiché f è continua, f è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Dallo studio del segno di $f'(x) = xe^x(x+2)$, si ricava che esistono due intervalli in cui f è strettamente crescente e un intervallo in cui è strettamente decrescente. Dunque la risposta (d) è errata.

4. RISPOSTA ESATTA: (d).

La risposta (a) è errata in quanto $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro.

La risposta (b) è errata in quanto $f(2) \neq f(5)$.

f è continua in $x_0 = 0$ in quanto $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = -1$.

Per vedere se f è derivabile calcoliamo la derivata di f, tenendo conto che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{-x-1}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^x}{x-1}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e pertanto} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-xe^x}{(x+1)^2}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Poiché $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -2$, mentre $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$, f non è derivabile in $x_0 = 0$.

5. RISPOSTA ESATTA: (a).

Dal calcolo fatto precedentemente di

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-xe^x}{(x+1)^2}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

si deduce che $f'(x) < 0$ se $1 < x < 2$, mentre $f'(x) > 0$ se $x > 2$.

Pertanto f è monotona decrescente nell'intervallo $]\,1, 2\,[$ mentre è crescente in $]\,2, +\infty[$. Poiché $f'(2) = 0$, il punto $x = 2$ risulta un punto di minimo relativo. Dunque la risposta (a) è esatta mentre la risposta (b) è errata.

Il punto $x_0 = -1$ non fa parte del dominio di f (la retta $x = -1$ è un asintoto verticale), dunque la risposta (c) è errata.

Il teorema di Lagrange non si può applicare a f nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\right]$ in quanto f non è derivabile in $x_0 = 0$.

6. RISPOSTA ESATTA: (d).

Infatti $f(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $[1, 2]$.

Il dominio di f è $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Inoltre:

$$\arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan x, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Dunque (a) è falsa. Anche (c) è falsa, perché $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, mentre $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$; pertanto non esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$, e $x = 0$ non è un punto di discontinuità eliminabile.

La (b) è falsa, perché $\inf(f) = -\frac{\pi}{2}$, ma non esiste nessun punto $x \in \mathrm{Dom}(f)$ per cui $f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

7. RISPOSTA ESATTA: (b).

La funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ ha periodo T=$\frac{2\pi}{\pi} = 2$; inoltre Im(f) $= [-1, 1]$. Quindi le risposte (a) e (c) sono errate.

La tangente in 0 è la retta $y = \pi x$, il cui coefficiente angolare è maggiore di 1. Pertanto la risposta (d) è errata e (b) è esatta.

8. RISPOSTA ESATTA: (d).

La funzione $f(x)$ in $x = 2$ ha un punto di discontinuità artificiale, pertanto non è derivabile; dunque la risposta (b) è errata.

La funzione è invece continua in $x = 0$, perché $x^2 + 1$ è continua.

Non si può applicare ad f il teorema di Lagrange in $[0, 2]$ perché f non è continua nel punto $x = 2$; si può vedere tracciando il grafico di f che non esiste nessun punto $x_0 \in]0, 2[$ in cui la tangente al grafico di f sia parallela alla congiungente i punti $A = (0, 1)$, $B = (2, 0)$.

Il punto $x = 2$ è un punto di minimo assoluto per f: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(2) = 0$.

9. RISPOSTA ESATTA: (d).

$f(x)$ non è dispari perché $f(-x) = \sqrt[3]{-x}(1 + e^{-x}) \neq -f(x)$.

f non è limitata perché $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

f non è derivabile in $x = 0$. Infatti: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(1 + e^x) + \sqrt[3]{x}e^x$; poiché $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, c'è un punto a tangente verticale in $x = 0$.

10. RISPOSTA ESATTA: (b).

Dalle ipotesi segue che f è continua in ogni intervallo chiuso contenuto in $]0, 1[$ e derivabile in ogni intervallo aperto contenuto in $]0, 1[$. Invece $f\left(\frac{1}{4}\right)$ non necessariamente coincide con $f\left(\frac{3}{4}\right)$. Dunque il teorema di Lagrange è sempre applicabile ma non altrettanto il teorema di Rolle.

Pertanto la risposta (d) è errata e la (b) è esatta.

Le risposte (a) e (c) sono errate: la restrizione all'intervallo $[0, 1]$ della funzione mantissa $f(x)$ =M(x) fornisce un controesempio .

11. RISPOSTA ESATTA: (d).

Poiché f non è continua in $x = 0$, f non è derivabile in $x = 0$. Dunque (a) è errata e (d) è esatta.

L'immagine di f è l'unione dei due intervalli $]-\infty, -2[\cup[0, +\infty[$; dunque f non può assumere il valore -1. Pertanto la (c) è errata.

f non è dispari perché il grafico di f non è simmetrico rispetto all'origine.

12. RISPOSTA ESATTA: (b).

Si ha:

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Dunque f è sempre positiva. Inoltre f è continua anche in $x = 0$ e il punto $x = 0$ è un punto di minimo assoluto. Pertanto le risposte (a) e (c) sono errate mentre la risposta (b) è esatta.

Il teorema di Rolle non è applicabile a f nell'intervallo $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, in quanto f non è derivabile nel punto $x = 0$.

13. RISPOSTA ESATTA: (a).

Infatti, se la funzione f è derivabile in $]-1, 1[$, per il teorema di Rolle, essendo $f(-1) = f(0)$ esisterà un punto $x_1 \in]-1, 0[$ in cui $f'(x_1) = 0$; analogamente, essendo $f(0) = f(1)$ esisterà un punto $x_2 \in]0, 1[$ in cui $f'(x_2) = 0$. Poiché $f'(x_1) = f'(x_2)$, se f è derivabile due volte in $]-1, 1[$, applicando il teorema di Rolle ad f' sull'intervallo $]x_1, x_2[$ si troverà un punto $c \in]x_1, x_2[\subset]-1, 1[$ in cui $f''(c) = 0$.

La funzione $f(x) = |\sin(\pi x)|$ fornisce un controesempio per la (b).

La funzione $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ |x| & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ -x + 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ fornisce un controesempio per la (c).

La (d) è falsa: si consideri la funzione $f(x)$ identicamente nulla.