CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Esercizi risolti

1. Determinare
$$\lim_{x\to k\pi/2} [\cos x]^*$$
al variare di k in $\mathbb{Z}$. Ove tale limite non esista, discutere l'esistenza dei limiti laterali. Identificare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = [\cos x]$ ed il loro tipo.
2. Determinare per quale valore del parametro α la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ [x]^* + \alpha & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
è continua sull'intervallo $[-1, +\infty)$.
* $[x]$ denota la parte intera di x.
3. Sia
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)} & \text{se } x > 0 \\ a\, 2^x + 3 & \text{se } x \leq 0; \end{cases}$$
determinare a in modo che f risulti continua nel suo dominio.
4. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x = 2$ al grafico di
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$$
e ricavare la parte principale di $f(x) - f(2)$ per $x \to 2$.
5. Determinarne i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni
$$a)\ f(x) = |x^2 - 1| \qquad b)\ f(x) = e^{-|x|} \qquad c)\ f(x) = \min(x^2, \frac{1}{x^2})$$
6. Sia
$$f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & x \geq 0 \\ \alpha \sin x & x < 0. \end{cases}$$
Determinare α e β in modo che f sia continua e derivabile su $\mathbb{R}$.
7. Verificare che le funzioni
$$a)\ f(x) = x^2 \log|x| \qquad\qquad b)\ f(x) = |x|^x$$
sono prolungabili con continuità per $x = 0$. Le funzioni f così prolungate risultano derivabili in $x = 0$?
8. Sia $f(x)$ una funzione derivabile. Dimostrare che se f è pari allora f' è dispari, e viceversa se f è dispari allora f' è pari.

9. Tra tutte le rette $y = kx$ (con $k > 0$) trovare quella tangente al grafico di $f(x) = e^x$ in un punto di ascissa $x_0 > 0$. Utilizzare questo risultato per determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^x = kx$ al variare di k in $\mathbb{R}$.
10. Verificare che si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \arcsin x$ nel suo dominio $[a, b]$, e determinare i "punti di Lagrange", cioè i punti c tali che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
11. Sia $f(x) = x^7 + x$. Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$. Verificare che la funzione inversa f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$ e calcolare $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(2)$.
12. Sia $f(x) = (x-1)e^{x^2} + \operatorname{arctg}(\log x) + 2$. Dimostrare che f è invertibile sul suo dominio e determinare $\operatorname{im}(f)$.
13. Tra tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa assegnata a trovare quello di area massima.
14. Utilizzando la regola di de l'Hopital calcolare

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin 2x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\, 3^x)}{x}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3^x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\arcsin x - \pi/2}{\sqrt{1-x}} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

15. Verificare che
$$f(x) = \log(2+x) + 2\,\frac{x+1}{x+2}$$
non ha altri zeri oltre a $x_0 = -1$.
16. Determinare il numero di punti critici di
$$f(x) = \frac{x\log x - 1}{x^2}.$$
17. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^{x^9-9x+1} = a$ al variare di a in $\mathbb{R}$.
18. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\log x - 3}{\log x + 2}.$$
Discutere l'invertibilità di f, e calcolare $(f^{-1})'(-\frac{3}{2})$. È possibile scrivere esplicitamente la funzione inversa f^{-1}?

Soluzioni

1. Per la periodicità, è sufficiente considerare i casi: $k = 0, 1, 2, 3$. Disegnando il grafico di $f(x) = [\cos x]$ si vede che:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1; \qquad \lim_{x\to\pi} f(x) = -1 = f(\pi);$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0 = f(\tfrac{\pi}{2}) \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1;$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^+} f(x) = 0 = f(\tfrac{3}{2}\pi).$$

I punti $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ sono punti di discontinuità eliminabile. I punti $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ sono punti di discontinuità di prima specie (tipo salto).

2. La funzione è continua in tutti i punti di $[-1, +\infty)$ escluso al più lo zero. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + 1) = 1 = f(0),$$

la funzione è continua in zero da destra. Essendo infine

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \alpha + \lim_{x\to 0^-} [x] = \alpha - 1,$$

la funzione sarà continua anche nello zero se e solo se $\alpha - 1 = 1$, cioè $\alpha = 2$.

3. La funzione è continua in tutti i punti escluso al più nello zero. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a\, 2^x + 3) = a + 3 = f(0),$$

cioè f è continua in zero da sinistra. Calcolando il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x\left(\sqrt{1+x} - 1\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{x\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)} = 2.$$

Quindi f è continua in tutto il suo dominio se e solo se $a + 3 = 2$ cioè $a = -1$.

4. Si ha $f(2) = 4/3$. Calcolando $f'(x)$ otteniamo $f'(2) = -31/9$. Quindi la retta tangente nel punto $x_0 = 2$ ha equazione $y = -\frac{31}{9}(x-2) + \frac{4}{3}$. Utilizzando la prima formula dell'incremento finito si ha

$$f(x) - f(2) = -\tfrac{31}{9}(x-2) + o(x-2) \ \ (x \to 2),$$

e quindi la parte principale di $f(x) - f(2)$ per $x \to 2$ è $-\frac{31}{9}(x-2)$.

5. a) La funzione f ha due punti angolosi in $x = \pm 1$, come si vede facilmente anche disegnandone il grafico. Ad esempio calcolando le derivate laterali nel punto $x_0 = 1$ otteniamo

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x-1| \cdot |x+1|}{x - 1} = \pm 2.$$

b) La funzione f ha un punto angoloso in $x = 0$, come si verifica anche disegnandone il grafico. Esplicitamente, le derivate laterali in $x_0 = 0$ sono date da:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{x} = - \lim_{t\to 0^-} \frac{e^t - 1}{t} = -1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

c) Risolvendo la disequazione $x^2 < \frac{1}{x^2}$ si vede facilmente che

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x| \le 1, \quad x \neq 0, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Notiamo che f non è definita in $x = 0$. In tutti gli altri punti, escluso al più i punti "di raccordo" $x = \pm 1$, f è continua e derivabile perchè restrizione di funzioni continue e derivabili. La funzione è chiaramente continua nei punti $x = \pm 1$. Calcolando le derivate laterali in tali punti si ottiene facilmente $f'_\pm(1) = \mp 2 = f'_\pm(-1)$. Quindi f ha due punti angolosi in $x = \pm 1$. Possiamo anche procedere graficamente, notando che il grafico di f si disegna a partire dai due grafici di x^2 e $\frac{1}{x^2}$ prendendo sempre quello che sta al di sotto dell'altro. Il grafico così ottenuto presenta appunto due punti angolosi in $x = \pm 1$.

6. Imponendo la continuità in $x = 0$ si ottiene $\beta = \pm\sqrt{2}$. La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il punto di raccordo $x = 0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x - \beta) & x > 0 \\ \alpha \cos x & x < 0. \end{cases}$$

Sia $\beta = \pm\sqrt{2}$, così che f è continua in $x = 0$. Per studiare la derivabilità in $x = 0$ calcoliamo il limite per x che tende a zero della funzione $f'(x)$. Per un noto teorema, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile in zero e $f'(0) = l$. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -2\beta, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha,$$

vediamo che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = -2\beta = \mp 2\sqrt{2}$. In definitiva f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $(\alpha, \beta) = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, oppure $(\alpha, \beta) = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

7. a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per calcolare il limite di $f(x)$ per x che tende a zero ricordiamo il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$

Da questo otteniamo

$$\lim_{x\to 0} x^2 \log |x| = 0,$$

e quindi f si può prolungare con continuità nello zero ponendo $f(0) = 0$. Calcolando il limite del rapporto incrementale nello zero otteniamo che f è derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$, essendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \log |x|}{\cancel{x}} = 0.$$

b) Si ha

$$\lim_{x \to 0} |x|^x = \lim_{x \to 0} e^{x \log |x|} = e^0 = 1.$$

Posto $f(0) = 1$ e calcolando il limite del rapporto incrementale per x che tende a zero otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \log |x|} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{x \log |x|} - 1}{x \log |x|} \right) \cdot \log |x| = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Quindi in questo caso f non è derivabile in $x = 0$.

8. Sia f pari, $f(-x) = f(x)$. Prendendo la derivata di ambo i membri e utilizzando la formula di derivazione della funzione composta, otteniamo $-f'(-x) = f'(x)$, cioè f' é dispari. Analogamente se f è dispari, $f(-x) = -f(x)$, si ottiene $-f'(-x) = -f'(x)$, e quindi f' è pari.
9. Imponendo le condizioni di tangenza tra $f(x) = e^x$ e $g(x) = kx$, cioè

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x), \end{cases}$$

si ottiene facilmente $x = 1$ e $k = e$. Quindi la retta $y = ex$ è tangente a e^x nel punto di ascissa 1. Graficamente si deduce allora che l'equazione $e^x = kx$ ha 1 soluzione per $k < 0$ e per $k = e$, 2 soluzioni per $k > e$, nessuna per $0 \leq k < e$. Possiamo anche procedere in un altro modo, cioè studiamo la funzione $f(x) = e^x - kx$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Ci interessa trovare quanti zeri ha f, cioè il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. Possiamo supporre $k \neq 0$. Sia $k > 0$. Si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Calcolando la derivata e studiandone il segno otteniamo

$$f'(x) = e^x - k \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \log k.$$

Quindi f ha un punto di minimo assoluto in $x = \log k$. Per stabilire se questo minimo è positivo, negativo o nullo osserviamo che

$$f(\log k) = e^{\log k} - k \log k = k(1 - \log k) \leq 0 \Longleftrightarrow k \geq e.$$

Quindi se $k > e$ il minimo sta al di sotto dell'asse x e f ha due zeri. In questo caso la retta $y = kx$ è secante al grafico di e^x. Se $k = e$ il minimo giace sull'asse x, f ha un solo zero, e la retta $y = ex$ è tangente a e^x. Infine se $0 < k < e$ il minimo è al di sopra dell'asse x e quindi f non ha zeri. In tal caso la retta $y = kx$ non incontra il grafico di e^x. Sia ora $k < 0$. Si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $f'(x) = e^x - k > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dunque f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e si annulla in un solo punto x_0 (< 0 perchè $f(0) = 1$). Quindi per $k < 0$ la retta $y = kx$ incontra il grafico di e^x nel solo punto x_0, come è evidente anche graficamente.

10. La funzione $f(x) = \arcsin x$ è continua su $[-1, 1]$ ed è derivabile su $(-1, 1)$ (i punti $x = \pm 1$ sono punti a tangente verticale, essendo $\lim_{x\to\pm 1} f'(x) = +\infty$). Si può quindi applicare il teorema di Lagrange. I punti di Lagrange sono determinati da

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \Longrightarrow c = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}.$$

11. La funzione f è continua e strettamente crescente su $\mathbb{R}$, essendo $f'(x) = 7x^6 + 1 > 0\ \forall x$. Quindi f è invertibile su $\mathbb{R}$. Poichè la sua derivata non si annulla mai, la funzione inversa f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$. Essendo $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$, si ha

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1, \quad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{8}.$$

12. Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+$, e

$$f'(x) = e^{x^2}(2x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{x(1 + \log^2 x)}.$$

Si verifica subito che $f'(x) > 0\ \forall x > 0$, quindi f è strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$, e dunque è invertibile. Per determinare l'immagine osserviamo che se f è una funzione continua e strettamente crescente su un intervallo (a, b), allora l'immagine $\mathrm{im}(f)$ è l'intervallo (s, S), dove

$$s = \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f, \qquad S = \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 - \tfrac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \Longrightarrow \mathrm{im}(f) = (1 - \tfrac{\pi}{2}, +\infty).$$

13. Il problema si risolve facilmente senza calcoli osservando che i triangoli in questione si possono inscrivere in una semicirconferenza di diametro a. Quello di area massima si otterrà quando l'altezza relativa all'ipotenusa è massima, cioè quando è uguale al raggio $\frac{a}{2}$. Questo significa che il triangolo è isoscele, con cateti uguali a $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Dal punto di vista analitico $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$ é l'area in funzione della misura x di un cateto. Si ha $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, con $f(0) = f(a) = 0$. Studiando il segno della derivata prima $f'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$ si vede che $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ è punto di massimo relativo e assoluto, con $f(\frac{a}{\sqrt{2}}) = \frac{a^2}{4}$.

14. a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin 2x} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\, 3^x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\pi\, 3^x)\, \pi\, 3^x\ \log 3}{1} = \pi \log 3.$$

c)

$$\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^x+x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}} \overset{\text{H}}{=} e^{\lim_{x\to 0} \frac{e^x+1}{e^x+x}} = e^2.$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3^x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\cos(\log(1+3x))}{1+3x}}{e^x - 3^x \log 3} = \frac{3}{1-\log 3}.$$

e)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arcsin x - \pi/2}{\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = -2 \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = -\sqrt{2}.$$

f)

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

15. Si ha $\mathrm{dom}(f) = (-2, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$. La derivata prima

$$f'(x) = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

è sempre positiva in $\mathrm{dom}(f)$. Quindi f è strettamente crescente nel suo dominio, e non può avere altri zeri oltre a $x_0 = -1$.

16. Si ha $\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$, e la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{x + 2 - x\log x}{x^3}.$$

Quindi $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \log x = 1 + \frac{2}{x}$. Disegnando le due funzioni $\log x$ e $1 + \frac{2}{x}$ si vede facilmente che questa equazione ha un'unica soluzione $x_0 > 1$. Pertanto f ha un solo punto critico $x_0 > 1$.

17. Innanzitutto non ci sono soluzioni se $a \le 0$. Studiando la funzione $f(x) = e^{x^9 - 9x + 1}$ si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, e si trova che f ha un punto di massimo relativo in $x = -1$, con $f(-1) = e^9$, e un punto di minimo relativo in $x = 1$, con $f(1) = e^{-7}$. Disegnando un grafico qualitativo di f si vede che l'equazione proposta ha

$$\begin{cases} 1 \text{ soluzione per } 0 < a < e^{-7} \text{ e per } a > e^9, \\ 2 \text{ soluzioni per } a = e^{-7}, e^9, \\ 3 \text{ soluzioni per } e^{-7} < a < e^9. \end{cases}$$

18. Si ha $\mathrm{dom}(f) = (0, e^{-2}) \cup (e^{-2}, +\infty)$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to +\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to \frac{1}{e^2}^{\pm}} f(x) = \tfrac{-5}{0^{\pm}} = \mp\infty.$$

Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale e la retta $x = e^{-2}$ è asintoto verticale. La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{5}{x(\log x + 2)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f).$$

Questo implica che f è strettamente crescente su $(0, e^{-2})$ e su $(e^{-2}, +\infty)$. Quindi f è invertibile in ognuno di questi due intervalli. Essendo poi

$$f((0, e^{-2})) = (1, +\infty), \qquad f((e^{-2}, +\infty)) = (-\infty, 1),$$

f è iniettiva e quindi invertibile in tutto il suo dominio. Questo si vede facilmente anche disegnando il grafico di f. Essendo $f(1) = -\frac{3}{2}$, si ha

$$(f^{-1})'(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{5}.$$

L'equazione $f(x) = y$ si risolve esplicitamente e si ottiene $x = e^{\frac{2y+3}{1-y}}$. Dunque la funzione inversa è

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{2x+3}{1-x}}.$$