CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Esercizi proposti

1. Determinare
$$\lim_{x\to k\pi/2} M(\sin x) \qquad (M(t) \text{ denota la mantissa di } t)$$
al variare di k in $\mathbb{Z}$. Ove tale limite non esista, discutere l'esistenza dei limiti laterali. Identificare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = M(\sin x)$ ed il loro tipo.
2. Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \log(x+\beta^2) & \text{se } x > 0 \\ \frac{1-\cos(\alpha x)}{\text{arctg } (x^2)} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
sia continua nel suo dominio.
3. Calcolare la derivata prima $f'(x)$ per le seguenti funzioni:
$$a)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{\text{arctg } x} \qquad c)\ f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
$$d)\ f(x) = \cos\left((x^2+x)^5\right) \qquad e)\ f(x) = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \qquad f)\ f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$
4. Determinare i punti di non derivabilità delle funzioni
$$a)\ f(x) = |x^3 - x^2| \qquad b)\ f(x) = |x^3 - 2x^2 + x| \qquad c)\ f(x) = \sqrt[5]{x}.$$
5. Studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$.
6. Verificare che le funzioni
$$a)\ f(x) = e^{-1/x^2} \qquad b)\ f(x) = \frac{\text{arctg } (x^4 - x^2)}{x},$$
sono prolungabili con continuità per $x = 0$. Le funzioni f così prolungate risultano derivabili in $x = 0$?
7. Trovare $k > 0$ tale che i grafici delle funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = kx^2$ siano tangenti in un punto di ascissa $x_0 > 0$. Utilizzare questo risultato per determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^x = kx^2$ al variare di $k > 0$.
8. Dire se si può applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt{3x - x^2 - 2}$ nel suo dominio $[a, b]$. In caso affermativo, determinare i punti c tali che $f'(c) = 0$.
9. Dimostrare che la funzione $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è costante sul suo dominio e determinarne il valore.

10. Studiare la funzione $f(x) = x^3 - x$ e disegnarne il grafico. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = |f(x) + k|$ è derivabile in $(0, +\infty)$.
11. Determinare massimo e minimo relativi ed assoluti di $f(x) = x^2 - 3|x-1| + 2$ su $[-2, 3]$.
12. Utilizzando la regola di de l'Hopital calcolare

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log\cos x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\sin x}{\log x}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right) \qquad d)\ \lim_{x\to 1} (x-1)\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{2}x$$

$$e)\ \lim_{x\to +\infty} x \left(\mathrm{arctg}\ x - \arccos \frac{1}{x^2}\right) \qquad f)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin\sqrt{x^2-1}}{\log(x+3\sqrt{x^2-1})}$$

$$g)\ \lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\mathrm{arctg}\ x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) \qquad h)\ \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{2}}{x}.$$

13. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sia $f(x) = 3x^2 - a\log x$. a) Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, e determinare i valori di a per i quali l'equazione $f(x) = 0$ ammette due soluzioni distinte. b) Determinare i valori di a per i quali f risulta invertibile su tutto il suo dominio. Per tali a calcolare $(f^{-1})'(3)$.

Soluzioni

1. Per la periodicità, è sufficiente considerare i casi: $k = 0, 1, 2, 3$. Disegnando il grafico di $f(x) = M(\sin x)$ si vede che:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1;$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1 \neq f(\tfrac{\pi}{2}) = 0;$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = 0 = f(\pi) \neq \lim_{x\to \pi^+} f(x) = 1;$$

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi} f(x) = 0 = f(\tfrac{3}{2}\pi).$$

I punti $x = 2n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ sono punti di discontinuità di tipo salto. I punti $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ sono punti di discontinuità eliminabile.

2. La funzione è continua in tutti i punti escluso al più lo zero. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log(x + \beta^2) = \log(\beta^2).$$

Questo è uguale a $1 = f(0)$, cioè la funzione è continua in 0 da destra, se e solo se $\beta^2 = e$, cioè $\beta = \pm\sqrt{e}$. Si ha poi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\alpha^2}{2},$$

quindi f è continua in 0 da sinistra se e solo se $\frac{\alpha^2}{2} = 1$, cioè $\alpha = \pm\sqrt{2}$. In definitiva f è continua in zero se e solo se $(\alpha, \beta) = (\pm\sqrt{e}, \pm\sqrt{2})$ (4 coppie di valori).

3. a)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}\right)' = \frac{2}{(2 - x^2)^{3/2}}.$$

b)

$$\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)' = -\frac{1}{(1 + x^2)\operatorname{arctg}^2 x}.$$

c)

$$\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}\right].$$

d)

$$\left[\cos((x^2 + x)^5)\right]' = -10x(x^2 + x)^4 \sin((x^2 + x)^5).$$

e)

$$\left(\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.$$

f)

$$\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \neq 0.$$

4. a) La funzione $f(x) = x^2|x-1|$ ha un punto angoloso in $x = 1$, con $f'_\pm(1) = \pm 1$. b) La funzione $f(x) = |x(x-1)^2| = (x-1)^2|x|$ ha un punto angoloso in $x = 0$, con $f'_\pm(0) = \pm 1$. c) La funzione $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ha un punto a tangente verticale in $x = 0$.
5. Calcolando le derivate laterali in $x = 0$ si ottiene $f'_\pm(0) = \mp\frac{1}{2}$, quindi f non è derivabile nello zero.
6. a) Si ha $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$. Posto $f(0) = 0$, si ottiene che f è derivabile nello zero con $f'(0) = 0$, essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to +\infty} \sqrt{t}\, e^{-t} = 0.$$

b) Essendo arctg $(t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\,(x^4 - x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x} = 0.$$

Posto $f(0) = 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\,(x^4 - x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

Quindi f è derivabile in zero con $f'(0) = 1$.
7. Imponendo le condizioni di tangenza tra $f(x)$ e $g(x)$ si trova il valore critico $k = \frac{e^2}{4}$. Graficamente si vede allora che l'equazione $e^x = kx^2$ ha 1 soluzione per $0 < k < \frac{e^2}{4}$, 2 soluzioni per $k = \frac{e^2}{4}$, 3 soluzioni per $k > \frac{e^2}{4}$.
8. La funzione $f(x)$ è definita per $x \in [1, 2]$, è continua su $[1, 2]$ e derivabile su $(1, 2)$ (agli estremi ha la tangente verticale). Inoltre si ha $f(1) = f(2) = 0$. Le ipotesi del teorema di Rolle sono dunque soddisfatte. Essendo $f'(x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2-2}}$, si ottiene $c = 3/2$.
9. Si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, per ogni x nell'intervallo $(-1, 1)$. Dunque f è costante sull'intervallo $(-1, 1)$ per un corollario del teorema di Lagrange. Essendo continua in $[-1, 1]$, f è costante su tutto il suo dominio $[-1, 1]$. Si calcola facilmente che $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
10. La funzione f è dispari, tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, e presenta una oscillazione centrata in $x = 0$, con un punto di massimo (minimo) relativo in $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $(x = \frac{1}{\sqrt{3}})$. Disegnando la funzione $g(x) = |f(x) + k|$ per alcuni valori di k, ci si rende conto che affinchè g sia derivabile in $\mathbb{R}^+$ bisogna "tirare in su $f(x)$" almeno di una quantità $k_0 = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Otteniamo così $k \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
11. f ha minimo assoluto $m = -\frac{13}{4} = f(-\frac{3}{2})$, e massimo assoluto $M = 5 = f(3)$. Il punto $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{3}{2}) = \frac{11}{4}$. I punti $x = 1$ e $x = -2$ sono punti di massimo relativo (il primo è un punto angoloso) con $f(1) = 3$, $f(-2) = -3$.
12. a) -2; b) 1; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{2}{\pi}$; e) -1; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{3}$; h) $\mp\sqrt{2}$.
13. a) $a > 6e$. b) $a < 0$. Essendo $f(1) = 3$ si ha $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6-a}$.