

# NUMERI COMPLESSI

## Test di autovalutazione

- Se due numeri complessi  $z_1$  e  $z_2$  sono rappresentati nel piano di Gauss da due punti simmetrici rispetto all'origine:
  - sono le radici quadrate di uno stesso numero complesso
  - $z_1$  e  $z_2$  sono reali
  - $z_1$  e  $z_2$  sono coniugati
  - il quoziente  $\frac{z_1}{z_2}$  ha argomento 0
- Sia  $z = a + ib$  (con  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) una radice di molteplicità 3 del polinomio  $p(X) \in \mathbb{R}(X)$ . Allora:
  - $p(X)$  si decompone nel prodotto di due diversi polinomi di 3° grado
  - il grado di  $p(X)$  non può essere dispari
  - se il termine noto di  $p(X)$  è nullo, allora il suo grado è almeno 7
  - $p(X)$  è il quadrato di un polinomio di 3° grado
- Il numero complesso  $(-1 - \sqrt{3}i)^8$  coincide con:
  - $2^7 + 2^7\sqrt{3}i$
  - $-2^7 - 2^7\sqrt{3}i$
  - $2^7 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$
  - $2^8 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- L'equazione  $\operatorname{Im}\left(z\bar{z} + \frac{1}{z} + z + \bar{z}\right) = 0$ :
  - ha soluzioni immaginarie pure
  - ha soluzioni reali in numero finito
  - non ha soluzioni
  - ha infinite soluzioni reali
- L'equazione  $5z^6 = \sqrt{3} + i$ :
  - ha soluzioni che stanno su un quadrato
  - ha una soluzione reale
  - ha tra le soluzioni  $e^{i\frac{\pi}{36}}$
  - ha tra le soluzioni  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{13\pi}{36}}$

6. Sia  $p(Z)$  un polinomio a coefficienti reali di grado 5 in cui manchi il termine noto e di cui siano note le radici distinte non reali  $z_1$  e  $z_2$ . Allora  $p(Z)$  coincide con:
- $Z(Z - z_1)(Z - z_2)(Z - \bar{z}_1)(Z - \bar{z}_2)$
  - $Z(Z - z_1)^2(Z - z_2)^2$
  - $Z(Z^2 - z_1)(Z^2 - z_2)$
  - $aZ(Z^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1)Z + |z_1|^2)(Z^2 - 2 \operatorname{Re}(z_2)Z + |z_2|^2)$ , dove  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
7. I numeri complessi  $z_1 = \sqrt{5}$ ,  $z_2 = 1 - 2i$ ,  $z_3 = \sqrt{5}i$ ,  $z_4 = 1 + 2i$ :
- sono le radici quarte di uno stesso numero complesso
  - sono a due a due complessi coniugati
  - sono rappresentati nel piano di Gauss da punti che appartengono alla stessa circonferenza
  - sono gli zeri di un polinomio  $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$  di grado 4
8. Il polinomio  $p(Z) = 27i - 27(1 + i)Z + (27 + 9i)Z^2 - (9 + i)Z^3 + Z^4$ :
- coincide con  $(Z - 3)(Z - i)^3$
  - ammette le sole radici  $z_1 = 3$  tripla e  $z_2 = i$  semplice
  - ammette le radici complesse  $z_1 = 3$  e  $z_2 = i$  e le relative radici complesse coniugate
  - non può avere radici reali perché  $p(Z)$  è a coefficienti complessi
9. E' dato un polinomio  $P(Z)$  a coefficienti reali di cui  $z_1 = i$  è radice doppia e  $z_2 = 1 + 2i$  è radice semplice. Allora:
- $P(Z)$  è divisibile per  $Z^2 - 2Z + 5$
  - se il termine noto di  $P(Z)$  è nullo allora il grado di  $P(Z)$  è dispari
  - $P(Z)$  ha grado pari
  - $P(-1 - 2i) = 0$
10. Si consideri il numero complesso  $z_0 = -2 + 2i$
- una radice cubica di  $z_0$  ha argomento  $\varphi \in \left[ \pi, \frac{3}{2}\pi \right]$
  - il numero  $1 - i$  è una radice cubica di  $z_0$
  - non esistono numeri complessi  $z$  tali che  $|z + z_0| = 1$  e  $\operatorname{Im} z = 1$
  - i numeri  $z \in \mathbf{C}$  tali che  $|z| = |z_0|$  appartengono alle rette  $y = \sqrt{8}$ .

11. L'equazione  $z^6 = 64$  ha
- (a) due soluzioni reali e due coppie di soluzioni complesse coniugate
  - (b) una soluzione reale e 5 non reali
  - (c) sei soluzioni reali e distinte
  - (d) una soluzione reale con molteplicità sei
12. Si consideri il polinomio  $p(X) = 3(X + 2)^2(X^2 + 4)$
- (a) le radici di  $p(X)$  hanno tutte lo stesso modulo
  - (b) le radici di  $p(X)$  sono tutte a due a due coniugate
  - (c)  $p(X)$  è scomponibile nel prodotto di fattori reali tutti di primo grado
  - (d) le radici di  $p(X)$  sono tutte semplici
13. Le radici del polinomio  $(z^3 + 27)^5$
- (a) hanno tutte la stessa molteplicità
  - (b) hanno tutte lo stesso argomento
  - (c) hanno tutte modulo  $\sqrt[3]{-27}$
  - (d) sono 15 numeri complessi tutti distinti
14. Sia  $A$  l'insieme dei numeri  $z \in \mathbf{C}$  tali che  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ; sia  $z_0 = 1 - i$
- (a) due delle radici quarte di  $z_0$  appartengono ad  $A$
  - (b)  $z_0^2$  appartiene ad  $A$
  - (c) nessuna radice quadrata di  $z_0$  appartiene ad  $A$
  - (d) tutte le radici cubiche di  $z_0$  appartengono ad  $A$
15. L'equazione  $3z^3 - z^2 + 3z - 1 = 0$
- (a) ha la radice tripla  $-i$
  - (b) non può avere radici reali
  - (c) ha solo radici reali
  - (d) ha  $z = i$  tra le sue radici
16. L'equazione  $x^{14} + 2x^3 - x = 0$
- (a) non ha radici reali
  - (b) ha almeno due radici reali
  - (c) ha 13 radici complesse e 1 reale
  - (d) le radici sono rappresentate dai vertici di un poligono regolare di 14 lati

17. L'inverso di  $3 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$  è:

(a)  $\frac{1}{3} \left( \cos \frac{6}{\pi} - i \sin \frac{6}{\pi} \right)$

(b)  $\frac{1}{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

(c)  $\frac{3}{\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}}$

(d)  $\frac{1}{3 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}$

18. Siano  $z = 1 + i$ ,  $w = 2i$

(a)  $\frac{w^5}{z} \in \mathbb{R}$

(b) tra le radici di  $X^3 - w$  ve ne è almeno una reale

(c)  $z^8 = w^4$

(d)  $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} w$

19. Sono dati i due numeri complessi  $z = 1 + 2i$ ,  $w = -1 + 2i$ . Allora:

(a) Non esiste nessun polinomio a coefficienti reali di cui  $z$  e  $w$  siano radici

(b) I polinomi a coefficienti reali che hanno  $z$  e  $w$  come radici devono avere grado almeno 4

(c)  $|z - 3| = |w + 1|$

(d)  $z^2$  e  $w$  hanno la stessa distanza dall'origine

20. Le soluzioni dell'equazione:  $z^4 - 4i = 0$

(a) Sono due reali e due complesse coniugate

(b) Sono rappresentate (nel piano di Gauss) ai vertici di un quadrato di lato 2

(c) Sono  $\pm\sqrt{2}$ ,  $\pm i\sqrt{2}$

(d) Sono  $z = \pm(1 \pm i)$

21. E' dato il polinomio  $p(z) \in \mathbb{C}_2[z]$ . Allora:

(a) Se  $p(2 - i) = 0$ , allora  $p(2 + i) = 0$

(b) Se  $p(2) = p(2 + i) = p(2 - i) = 0$ , allora  $p(z) \equiv 0$

(c) Ha sempre due radici complesse coniugate

(d) Se i coefficienti di  $p(z)$  non sono reali, allora le sue radici non sono reali

## Correzione

### 1. RISPOSTA ESATTA: (a)

Infatti, supposto che  $z_1$  abbia modulo  $\rho$  e argomento  $\theta$ ,  $z_2$  avrà lo stesso modulo  $\rho$  e argomento  $\theta + \pi$ . Dunque  $z_1$  e  $z_2$  sono le due radici quadrate del numero complesso di modulo  $\rho^2$  e argomento  $2\theta$ .

Pertanto (a) è vera; (d) è falsa, in quanto  $\operatorname{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) = -\pi \neq 0$ ; (b) non è necessariamente vera; (c) è vera solo se i numeri sono immaginari puri.

### 2. RISPOSTA ESATTA: (c)

Infatti, essendo  $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ ,  $p(X)$  ha anche la radice  $\bar{z} = a - ib$  con molteplicità 3. Pertanto  $p(X)$  è divisibile per il polinomio di sesto grado  $(X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^3$ ; se il termine noto di  $p(X)$  è nullo,  $p(X)$  è divisibile anche per  $X$  e dunque ha almeno grado 7.

Il polinomio  $p(X) = X(X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^3$  fornisce un controesempio per (a), (b) e (d).

### 3. RISPOSTA ESATTA: (d)

Infatti il numero complesso  $z = -1 - \sqrt{3}i$  ha modulo 2 e argomento  $\frac{4\pi}{3}$ , e dunque  $z^8$  ha modulo  $2^8$  e argomento  $8 \frac{4\pi}{3} = \frac{32\pi}{3} = 10\pi + \frac{2\pi}{3}$ ; pertanto si scrive in forma esponenziale come in (d).

### 4. RISPOSTA ESATTA: (d)

Sia  $z = a + ib$ . Allora  $z\bar{z} + \frac{1}{z} + z + \bar{z} = a^2 + b^2 + \frac{a - ib}{a^2 + b^2} + 2a$ .

Pertanto la parte immaginaria è  $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ , ed è nulla se e solo se  $b = 0$ , cioè se  $z$  è un qualunque numero reale.

### 5. RISPOSTA ESATTA: (d)

Infatti le soluzioni dell'equazione data sono le 6 radici seste del numero complesso  $w = \frac{1}{5}(\sqrt{3} + i)$ .

Poiché  $w$  ha modulo  $\frac{2}{5}$  e argomento  $\frac{\pi}{6}$ , le soluzioni  $z$  dell'equazione avranno modulo  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$  e argomenti  $\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ ; quindi uno degli argomenti è  $\frac{13\pi}{36}$ .

Pertanto (d) è vera e (c) è falsa.

(b) è falsa perché nessuno degli argomenti scritti sopra è un multiplo di  $\pi$ .

(a) è falsa perché le soluzioni sono rappresentabili ai vertici di un esagono.

6. RISPOSTA ESATTA: (d)

Infatti se  $p(Z)$  ha coefficienti reali e  $z_1$  ne è una radice,  $\bar{z}_1$  è un'altra radice (e così anche per  $z_2$  e  $\bar{z}_2$ ). Dunque  $p(Z)$  è divisibile per  $Z^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1)Z + |z_1|^2$  e per  $Z^2 - 2 \operatorname{Re}(z_2)Z + |z_2|^2$ .

Inoltre poiché  $p(Z)$  non ha termine noto, risulta divisibile per  $Z$ .

Infine, se ha grado 5, non può avere altri divisori, se non costanti.

7. RISPOSTA ESATTA: (c)

I quattro numeri hanno modulo  $\sqrt{5}$ ; dunque sono rappresentabili nel piano di Gauss come punti della circonferenza di centro O e raggio  $\sqrt{5}$ .

(a) è falsa perché i quattro punti non sono i vertici di un quadrato.

(b) è falsa perché  $z_3$  non è il coniugato di  $z_1$ .

(d) è falsa perché un polinomio  $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$  che abbia  $z_3$  come radice, deve ammettere anche la radice  $\bar{z}_3$  e dunque deve essere almeno di grado 5.

8. RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti si prova che  $p(3) = 0$  e che  $p(i) = 0$ ; utilizzando (ad esempio) il metodo di Ruffini, si riesce a fattorizzare  $p(Z)$  e, precisamente, si ha:  $p(Z) = (Z - 3)^3(Z - i)$ .

Dunque la (a) e la (d) sono errate mentre la (b) è esatta.

La (c) è errata: il polinomio non ha coefficienti in  $\mathbb{R}$  e dunque non è detto che se ammette una radice complessa debba avere anche la sua coniugata; infatti  $p(-i) \neq 0$ .

9. RISPOSTA ESATTA: (a)

Infatti, essendo  $P(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ ,  $P(Z)$  ha anche la radice semplice  $\bar{z}_2 = 1 - 2i$ . Pertanto  $P(Z)$  è divisibile per il polinomio  $(Z^2 - 2 \operatorname{Re} z_2 Z + |z_2|^2) = Z^2 - 2Z + 5$ .

Il polinomio  $P(Z) = Z(Z - 1)(Z^2 + 1)^2(Z^2 - 2Z + 5)$  fornisce un controesempio per (b).

Il polinomio  $P(Z) = Z(Z^2 + 1)^2(Z^2 - 2Z + 5)$  fornisce un controesempio per (c).

(d) non è necessariamente vera (è vero invece che  $P(1 - 2i) = 0$ ).

10. RISPOSTA ESATTA: (c)

Il numero complesso  $z_0$  ha modulo  $\sqrt{8}$  e argomento  $\frac{3\pi}{4}$ . Pertanto le sue radici cubiche hanno modulo  $\sqrt[3]{8}$  e argomenti  $\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$ ,  $k = 0, 1, 2$ ; dunque (a) e (b) sono sbagliate.

(d) è errata perché i numeri complessi di modulo  $\sqrt{8}$  appartengono alla circonferenza di centro O e raggio  $\sqrt{8}$ .

(c) è esatta: infatti, essendo  $\operatorname{Im} z = 1$ , si può porre  $z = a + i$  e osservare che il modulo del numero complesso  $z + z_0 = (a - 2) + 3i$  è sicuramente maggiore di 3.

11. RISPOSTA ESATTA: (a)

Le soluzioni dell'equazione  $z^6 = 64$  sono le sei radici seste di  $2^6$ , ovvero i sei numeri complessi  $2 e^{i \frac{k\pi}{3}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ . Di esse due sono reali (i numeri  $\pm 2$ ) e le altre sono a due a due coniugate (precisamente la coppia di argomenti  $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$  e la coppia di argomenti  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ ).

12. RISPOSTA ESATTA: (a)

Le radici di  $p(X)$  sono  $-2$  e  $\pm 2i$ , ed hanno tutte modulo 2. Dunque (a) è esatta e (b) è falsa.

Il fattore  $X^2 + 4$  non è ulteriormente decomponibile (in fattori a coefficienti reali). Pertanto (c) è errata; (d) è errata perché la radice  $x = -2$  è doppia.++

13. RISPOSTA ESATTA: (a)

Infatti sono le 3 radici cubiche (tutte distinte) di  $-27$ , prese ciascuna con molteplicità 5. Dunque sono 3 numeri complessi distinti (ciascuno contato 5 volte).

Pertanto (a) è vera, mentre (b) e (d) sono false. (c) è falsa perché il modulo di un numero complesso non può essere negativo.

14. RISPOSTA ESATTA: (a)

Il numero complesso  $z_0 = 1 - i$  ha modulo  $\sqrt{2}$  e argomento  $-\frac{\pi}{4}$ . Pertanto:

le radici quarte di  $z_0$  hanno argomenti  $-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ; dunque le due radici ottenute per  $k = 1, 2$  appartengono ad A;

$z_0^2$  ha argomento  $-\frac{\pi}{2}$  e quindi non appartiene ad A;

le radici quadrate di  $z_0$  hanno argomenti  $-\frac{\pi}{8}$  e  $-\frac{\pi}{8} + \pi$ . Dunque la seconda appartiene ad A;

le radici cubiche di  $z_0$  hanno argomenti  $-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ,  $k = 0, 1, 2$ ; pertanto solo la seconda radice appartiene ad A.

15. RISPOSTA ESATTA: (d)

Il polinomio  $3z^3 - z^2 + 3z - 1$  si fattorizza in  $(3z - 1)(z^2 + 1)$ . Dunque ha la radice reale  $z = \frac{1}{3}$  e le radici complesse coniugate  $z = \pm i$ . Pertanto (d) è vera e le altre sono false.

16. RISPOSTA ESATTA: (b)

L'equazione data ammette tra le radici  $z = 0$  e  $z = -1$ . Quindi (b) è vera e le altre sono false.

17. RISPOSTA ESATTA: (b)

Il numero complesso dato ha modulo 3 e argomento  $-\frac{\pi}{6}$ . Dunque il suo reciproco ha modulo  $\frac{1}{3}$  e argomento  $\frac{\pi}{6}$ .

18. RISPOSTA ESATTA: (c)

Il numero complesso  $z$  ha modulo  $\sqrt{2}$  e argomento  $\frac{\pi}{4}$ ;  $w$  ha modulo 2 e argomento  $\frac{\pi}{2}$ .

Il numero complesso  $\frac{w^5}{z}$  ha argomento  $5 \operatorname{Arg} w - \operatorname{Arg} z = 9 \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ . Pertanto non è reale.

Le radici del polinomio  $X^3 - w$  sono le tre radici cubiche di  $w = 2i$ ; esse hanno argomenti  $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ,  $k = 0, 1, 2$ ; dunque nessuna di esse è reale.

Il numero complesso  $z^8$  ha modulo  $(\sqrt{2})^8 = 2^4$  e argomento  $8 \frac{\pi}{4} = 2\pi$ ; il numero  $w^4$  ha modulo  $2^4$  e argomento  $4 \frac{\pi}{2} = 2\pi$ . Pertanto sono uguali.

$\operatorname{Re}(wz) = \operatorname{Re}(-2 + 2i) = -2$ . Invece  $\operatorname{Re} w \cdot \operatorname{Re} z = 1 \cdot 0 = 0$ .

19. RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti i polinomi a coefficienti reali che hanno  $z$  e  $w$  come radici devono ammettere anche le radici  $\bar{z}$  e  $\bar{w}$ . Pertanto devono avere almeno grado 4.

Il polinomio  $(z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 5)$  fornisce un controesempio ad (a).

(d) è falsa perché  $|z| = |w| = \sqrt{5}$  e dunque  $|z^2| \neq |w|$ .

(c) è falsa: infatti  $|z - 3| = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$  mentre  $|w + 1| = |2i| = 2$ .

20. RISPOSTA ESATTA: (b)

Le soluzioni dell'equazione  $z^4 - 4i = 0$  sono le quattro radici quarte del numero complesso  $4i$ ; esse hanno modulo  $\sqrt{2}$  e argomenti  $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Nessuna è reale; dunque (a) e (c) sono false. Esse sono disposte ai vertici di un quadrato su una circonferenza di centro l'origine e raggio  $\sqrt{2}$ ; pertanto il lato del quadrato vale  $\sqrt{2+2} = 2$ .

(d) è falsa perché gli argomenti di  $\pm(1 \pm i)$  sono  $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

21. RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti per il teorema fondamentale dell'algebra un polinomio  $p(z) \in \mathbf{C}[z]$  di grado  $n$  non identicamente nullo ha esattamente  $n$  radici.

Dunque se il polinomio  $p(z) \in \mathbf{C}_2[z]$  ha più di due radici deve essere identicamente nullo.

Il polinomio  $z(z - 2 + i) = z^2 + (i - 2)z$  fornisce un controesempio per (a) e (c).

Il polinomio  $iz^2 - i$  fornisce un controesempio per (d).