NUMERI COMPLESSI

Test di autovalutazione

1. Se due numeri complessi z_1 e z_2 sono rappresentati nel piano di Gauss da due punti simmetrici rispetto all'origine:
   (a) sono le radici quadrate di uno stesso numero complesso
   (b) z_1 e z_2 sono reali
   (c) z_1 e z_2 sono coniugati
   (d) il quoziente $\dfrac{z_1}{z_2}$ ha argomento 0

2. Sia $z = a + ib$ (con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) una radice di molteplicità 3 del polinomio $p(X) \in \mathbb{R}(X)$. Allora:
   (a) $p(X)$ si decompone nel prodotto di due diversi polinomi di 3^o grado
   (b) il grado di $p(X)$ non può essere dispari
   (c) se il termine noto di $p(X)$ è nullo, allora il suo grado è almeno 7
   (d) $p(X)$ è il quadrato di un polinomio di 3^o grado

3. Il numero complesso $(-1-\sqrt{3}\, i)^8$ coincide con:
   (a) $2^7 + 2^7\sqrt{3}\, i$
   (b) $-2^7 - 2^7\sqrt{3}\, i$
   (c) $2^7 \cdot e^{\,i\frac{\pi}{3}}$
   (d) $2^8 \cdot e^{\,i\frac{2\pi}{3}}$

4. L'equazione $\mathrm{Im}\left(z\overline{z} + \dfrac{1}{z} + z + \overline{z}\right) = 0$:
   (a) ha soluzioni immaginarie pure
   (b) ha soluzioni reali in numero finito
   (c) non ha soluzioni
   (d) ha infinite soluzioni reali

5. L'equazione $5z^6 = \sqrt{3} + i$:
   (a) ha soluzioni che stanno su un quadrato
   (b) ha una soluzione reale
   (c) ha tra le soluzioni $e^{i\frac{\pi}{36}}$
   (d) ha tra le soluzioni $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{13\pi}{36}}$

6. Sia $p(Z)$ un polinomio a coefficienti reali di grado 5 in cui manchi il termine noto e di cui siano note le radici distinte non reali z_1 e z_2 . Allora $p(Z)$ coincide con:

   (a) $Z(Z-z_1)(Z-z_2)(Z-\overline{z}_1)(Z-\overline{z}_2)$
   (b) $Z(Z-z_1)^2(Z-z_2)^2$
   (c) $Z(Z^2-z_1)(Z^2-z_2)$
   (d) $aZ(Z^2-2\text{ Re }(z_1)Z+|z_1|^2)(Z^2-2\text{ Re }(z_2)Z+|z_2|^2)$, dove $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

7. I numeri complessi $z_1=\sqrt{5}$, $z_2=1-2i$, $z_3=\sqrt{5}i$, $z_4=1+2i$:

   (a) sono le radici quarte di uno stesso numero complesso
   (b) sono a due a due complessi coniugati
   (c) sono rappresentati nel piano di Gauss da punti che appartengono alla stessa circonferenza
   (d) sono gli zeri di un polinomio $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ di grado 4

8. Il polinomio $p(Z)=27i-27(1+i)Z+(27+9i)Z^2-(9+i)Z^3+Z^4$:

   (a) coincide con $(Z-3)(Z-i)^3$
   (b) ammette le sole radici $z_1=3$ tripla e $z_2=i$ semplice
   (c) ammette le radici complesse $z_1=3$ e $z_2=i$ e le relative radici complesse coniugate
   (d) non può avere radici reali perché $p(Z)$ è a coefficienti complessi

9. E' dato un polinomio $P(Z)$ a coefficienti reali di cui $z_1=i$ è radice doppia e $z_2=1+2i$ è radice semplice. Allora:

   (a) $P(Z)$ è divisibile per Z^2-2Z+5
   (b) se il termine noto di $P(Z)$ è nullo allora il grado di $P(Z)$ è dispari
   (c) $P(Z)$ ha grado pari
   (d) $P(-1-2i)=0$

10. Si consideri il numero complesso $z_0=-2+2i$

   (a) una radice cubica di z_0 ha argomento $\varphi \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$
   (b) il numero $1-i$ è una radice cubica di z_0
   (c) non esistono numeri complessi z tali che $|z+z_0|=1$ e Im $z=1$
   (d) i numeri $z \in$ **C** tali che $|z|=|z_0|$ appartengono alle rette $y=\sqrt{8}$.

11. L'equazione $z^6 = 64$ ha

    (a) due soluzioni reali e due coppie di soluzioni complesse coniugate
    (b) una soluzione reale e 5 non reali
    (c) sei soluzioni reali e distinte
    (d) una soluzione reale con molteplicità sei

12. Si consideri il polinomio p(X) $= 3(X+2)^2(X^2+4)$

    (a) le radici di p(X) hanno tutte lo stesso modulo
    (b) le radici di p(X) sono tutte a due a due coniugate
    (c) p(X) è scomponibile nel prodotto di fattori reali tutti di primo grado
    (d) le radici di p(X) sono tutte semplici

13. Le radici del polinomio $(z^3+27)^5$

    (a) hanno tutte la stessa molteplicità
    (b) hanno tutte lo stesso argomento
    (c) hanno tutte modulo $\sqrt[3]{-27}$
    (d) sono 15 numeri complessi tutti distinti

14. Sia A l'insieme dei numeri $z \in$ **C** tali che Im $z \geq 0$; sia $z_0 = 1 - i$

    (a) due delle radici quarte di z_0 appartengono ad A
    (b) z_0^2 appartiene ad A
    (c) nessuna radice quadrata di z_0 appartiene ad A
    (d) tutte le radici cubiche di z_0 appartengono ad A

15. L'equazione $3z^3 - z^2 + 3z - 1 = 0$

    (a) ha la radice tripla $-i$
    (b) non può avere radici reali
    (c) ha solo radici reali
    (d) ha $z = i$ tra le sue radici

16. L'equazione $x^{14} + 2x^3 - x = 0$

    (a) non ha radici reali
    (b) ha almeno due radici reali
    (c) ha 13 radici complesse e 1 reale
    (d) le radici sono rappresentate dai vertici di un poligono regolare di 14 lati

17. L'inverso di $3\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ è:

(a) $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{6}{\pi} - i\sin\frac{6}{\pi}\right)$

(b) $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(c) $\dfrac{3}{\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}}$

(d) $\dfrac{1}{3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

18. Siano $z = 1 + i$, $w = 2i$

(a) $\frac{w^5}{z} \in \mathbb{R}$

(b) tra le radici di $X^3 - w$ ve ne è almeno una reale

(c) $z^8 = w^4$

(d) $\text{Re }(zw) = \text{Re } z \cdot \text{Re } w$

19. Sono dati i due numeri complessi $z = 1 + 2i$, $w = -1 + 2i$. Allora:

(a) Non esiste nessun polinomio a coefficienti reali di cui z e w siano radici

(b) I polinomi a coefficienti reali che hanno z e w come radici devono avere grado almeno 4

(c) $|z - 3| = |w + 1|$

(d) z^2 e w hanno la stessa distanza dall'origine

20. Le soluzioni dell'equazione: $z^4 - 4i = 0$

(a) Sono due reali e due complesse coniugate

(b) Sono rappresentate (nel piano di Gauss) ai vertici di un quadrato di lato 2

(c) Sono $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$

(d) Sono $z = \pm(1 \pm i)$

21. E' dato il polinomio $p(z) \in \mathbf{C}_2[z]$. Allora:

(a) Se $p(2 - i) = 0$, allora $p(2 + i) = 0$

(b) Se $p(2) = p(2 + i) = p(2 - i) = 0$, allora $p(z) \equiv 0$

(c) Ha sempre due radici complesse coniugate

(d) Se i coefficienti di $p(z)$ non sono reali, allora le sue radici non sono reali

Correzione

1. RISPOSTA ESATTA: (a)

   Infatti, supposto che z_1 abbia modulo ρ e argomento θ , z_2 avrà lo stesso modulo ρ e argomento $\theta+\pi$. Dunque z_1 e z_2 sono le due radici quadrate del numero complesso di modulo ρ^2 e argomento 2θ .

   Pertanto (a) è vera ; (d) è falsa, in quanto $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = -\pi \neq 0$; (b) non è necessariamente vera; (c) è vera solo se i numeri sono immaginari puri.

2. RISPOSTA ESATTA: (c)

   Infatti, essendo $p(X) \in \mathbb{R}[X]$, $p(X)$ ha anche la radice $\overline{z} = a - ib$ con molteplicità 3. Pertanto $p(X)$ è divisibile per il polinomio di sesto grado $(X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^3$; se il termine noto di $p(X)$ è nullo, $p(X)$ è divisibile anche per X e dunque ha almeno grado 7.

   Il polinomio $p(X) = X(X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^3$ fornisce un controsempio per (a), (b) e (d).

3. RISPOSTA ESATTA: (d)

   Infatti il numero complesso $z = -1 - \sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\frac{4\pi}{3}$, e dunque z^8 ha modulo 2^8 e argomento $8\,\frac{4\pi}{3} = \frac{32\pi}{3} = 10\pi + \frac{2\pi}{3}$; pertanto si scrive in forma esponenziale come in (d).

4. RISPOSTA ESATTA: (d)

   Sia $z = a + ib$. Allora $z\overline{z} + \frac{1}{z} + z + \overline{z} = a^2 + b^2 + \frac{a - ib}{a^2 + b^2} + 2a$.

   Pertanto la parte immaginaria è $\frac{-b}{a^2 + b^2}$, ed è nulla se e solo se $b = 0$, cioè se z è un qualunque numero reale.

5. RISPOSTA ESATTA: (d)

   Infatti le soluzioni dell'equazione data sono le 6 radici seste del numero complesso $w = \frac{1}{5}(\sqrt{3} + i)$.

   Poiché w ha modulo $\frac{2}{5}$ e argomento $\frac{\pi}{6}$, le soluzioni z dell'equazione avranno modulo $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$ e argomenti $\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 5$; quindi uno degli argomenti è $\frac{13\pi}{36}$.
   Pertanto (d) è vera e (c) è falsa.
   (b) è falsa perché nessuno degli argomenti scritti sopra è un multiplo di π .
   (a) è falsa perché le soluzioni sono rappresentabili ai vertici di un esagono.

6. RISPOSTA ESATTA: (d)

   Infatti se $p(Z)$ ha coefficienti reali e z_1 ne è una radice, $\overline{z}_1$ è un'altra radice (e cosí anche per z_2 e $\overline{z}_2$). Dunque $p(Z)$ è divisibile per $Z^2 - 2\ \text{Re}\ (z_1)Z + |z_1|^2$ e per $Z^2 - 2\ \text{Re}\ (z_2)Z + |z_2|^2$.

   Inoltre poiché $p(Z)$ non ha termine noto, risulta divisibile per Z .

   Infine, se ha grado 5, non può avere altri divisori, se non costanti.

7. RISPOSTA ESATTA: (c)

   I quattro numeri hanno modulo $\sqrt{5}$; dunque sono rappresentabili nel piano di Gauss come punti della circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{5}$.

   (a) è falsa perché i quattro punti non sono i vertici di un quadrato.

   (b) è falsa perché z_3 non è il coniugato di z_1 .

   (d) è falsa perché un polinomio $p(Z) \in \mathbb{R}[Z]$ che abbia z_3 come radice, deve ammettere anche la radice $\overline{z}_3$ e dunque deve essere almeno di grado 5.

8. RISPOSTA ESATTA: (b)

   Infatti si prova che $p(3) = 0$ e che $p(i) = 0$; utilizzando (ad esempio) il metodo di Ruffini, si riesce a fattorizzare $p(Z)$ e , precisamente, si ha : $p(Z) = (Z - 3)^3(Z - i)$.

   Dunque la (a) e la (d) sono errate mentre la (b) è esatta.

   La (c) è errata: il polinomio non ha coefficienti in $\mathbb{R}$ e dunque non è detto che se ammette una radice complessa debba avere anche la sua coniugata; infatti $p(-i) \neq 0$.

9. RISPOSTA ESATTA: (a)

   Infatti, essendo $P(Z) \in \mathbb{R}[Z]$, $P(Z)$ ha anche la radice semplice $\overline{z}_2 = 1 - 2i$. Pertanto $P(Z)$ è divisibile per il polinomio $(Z^2 - 2\ \text{Re}\ z_2 Z + |z_2|^2) = Z^2 - 2Z + 5$.

   Il polinomio $P(Z) = Z(Z - 1)(Z^2 + 1)^2(Z^2 - 2Z + 5)$ fornisce un controesempio per (b).

   Il polinomio $P(Z) = Z(Z^2 + 1)^2(Z^2 - 2Z + 5)$ fornisce un controesempio per (c).

   (d) non è necessariamente vera (è vero invece che $P(1 - 2i) = 0$).

10. RISPOSTA ESATTA: (c)

    Il numero complesso z_0 ha modulo $\sqrt{8}$ e argomento $\dfrac{3\pi}{4}$. Pertanto le sue radici cubiche hanno modulo $\sqrt[6]{8}$ e argomenti $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$; dunque (a) e (b) sono sbagliate.

    (d) è errata perché i numeri complessi di modulo $\sqrt{8}$ appartengono alla circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{8}$.

    (c) è esatta : infatti, essendo $\text{Im}\ z = 1$, si può porre $z = a + i$ e osservare che il modulo del numero complesso $z + z_0 = (a - 2) + 3i$ è sicuramente maggiore di 3.

11. RISPOSTA ESATTA: (a)

Le soluzioni dell'equazione $z^6 = 64$ sono le sei radici seste di 2^6 , ovvero i sei numeri complessi $2\, e^{i\, \frac{k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 5$. Di esse due sono reali (i numeri ± 2) e le altre sono a due a due coniugate (precisamente la coppia di argomenti $(\frac{\pi}{3} , \frac{5\pi}{3})$ e la coppia di argomenti $(\frac{2\pi}{3} , \frac{4\pi}{3})$).

12. RISPOSTA ESATTA: (a)

Le radici di p(X) sono -2 e $\pm 2i$, ed hanno tutte modulo 2. Dunque (a) è esatta e (b) è falsa.

Il fattore $X^2 + 4$ non è ulteriormente decomponibile (in fattori a coefficienti reali). Pertanto (c) è errata; (d) è errata perché la radice $x = -2$ è doppia.++

13. RISPOSTA ESATTA: (a)

Infatti sono le 3 radici cubiche (tutte distinte) di -27, prese ciascuna con molteplicità 5. Dunque sono 3 numeri complessi distinti (ciascuno contato 5 volte).

Pertanto (a) è vera , mentre (b) e (d) sono false. (c) è falsa perché il modulo di un numero complesso non può essere negativo.

14. RISPOSTA ESATTA: (a)

Il numero complesso $z_0 = 1 - i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $-\dfrac{\pi}{4}$. Pertanto:

le radici quarte di z_0 hanno argomenti $-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$; dunque le due radici ottenute per $k = 1, 2$ appartengono ad A;

z_0^2 ha argomento $-\frac{\pi}{2}$ e quindi non appartiene ad A;

le radici quadrate di z_0 hanno argomenti $-\frac{\pi}{8}$ e $-\frac{\pi}{8} + \pi$. Dunque la seconda appartiene ad A;

le radici cubiche di z_0 hanno argomenti $-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$; pertanto solo la seconda radice appartiene ad A.

15. RISPOSTA ESATTA: (d)

Il polinomio $3z^3 - z^2 + 3z - 1$ si fattorizza in $(3z - 1)(z^2 + 1)$. Dunque ha la radice reale $z = \frac{1}{3}$ e le radici complesse coniugate $z = \pm i$. Pertanto (d) è vera e le altre sono false.

16. RISPOSTA ESATTA: (b)

L'equazione data ammette tra le radici $z = 0$ e $z = -1$. Quindi (b) è vera e le altre sono false.

17. RISPOSTA ESATTA: (b)

Il numero complesso dato ha modulo 3 e argomento $-\frac{\pi}{6}$. Dunque il suo reciproco ha modulo $\frac{1}{3}$ e argomento $\frac{\pi}{6}$.

18. RISPOSTA ESATTA: (c)

Il numero complesso z ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\frac{\pi}{4}$; w ha modulo 2 e argomento $\frac{\pi}{2}$.

Il numero complesso $\dfrac{w^5}{z}$ ha argomento $5 \operatorname{Arg} w - \operatorname{Arg} z = 9 \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$. Pertanto non è reale.

Le radici del polinomio $X^3 - w$ sono le tre radici cubiche di $w = 2i$; esse hanno argomenti $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$; dunque nessuna di esse è reale.

Il numero complesso z^8 ha modulo $(\sqrt{2})^8 = 2^4$ e argomento $8 \frac{\pi}{4} = 2\pi$; il numero w^4 ha modulo 2^4 e argomento $4 \frac{\pi}{2} = 2\pi$. Pertanto sono uguali.

$\operatorname{Re}(wz) = \operatorname{Re}(-2 + 2i) = -2$. Invece $\operatorname{Re} w \cdot \operatorname{Re} z = 1 \cdot 0 = 0$.

19. RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti i polinomi a coefficienti reali che hanno z e w come radici devono ammettere anche le radici $\overline{z}$ e $\overline{w}$. Pertanto devono avere almeno grado 4.

Il polinomio $(z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 5)$ fornisce un controesempio ad (a).

(d) è falsa perché $|z| = |w| = \sqrt{5}$ e dunque $|z^2| \neq |w|$.

(c) è falsa: infatti $|z - 3| = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ mentre $|w + 1| = |2i| = 2$.

20. RISPOSTA ESATTA: (b)

Le soluzioni dell'equazione $z^4 - 4i = 0$ sono le quattro radici quarte del numero complesso $4i$; esse hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Nessuna è reale; dunque (a) e (c) sono false. Esse sono disposte ai vertici di un quadrato su una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$; pertanto il lato del quadrato vale $\sqrt{2 + 2} = 2$.

(d) è falsa perché gli argomenti di $\pm(1 \pm i)$ sono $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

21. RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti per il teorema fondamentale dell'algebra un polinomio $p(z) \in \mathbf{C}[z]$ di grado n non identicamente nullo ha esattamente n radici.

Dunque se il polinomio $p(z) \in \mathbf{C}_2[z]$ ha più di due radici deve essere identicamente nullo.

Il polinomio $z(z - 2 + i) = z^2 + (i - 2)z$ fornisce un controesempio per (a) e (c).

Il polinomio $iz^2 - i$ fornisce un controesempio per (d).