NUMERI COMPLESSI

Esercizi proposti

1. Calcolare le seguenti potenze di i:

   $a)$ i^5 [i]

   $b)$ $\dfrac{1}{i^3}$ [i]

   $c)$ i^{63} [-i]

   $d)$ i^{-9} [-i]

   $a)$ i^5 $b)$ $\dfrac{1}{i^3}$ $c)$ i^{63} $d)$ i^{-9}

   [RISPOSTE: i , i , $-i$, $-i$]

2. Semplificare le seguenti espressioni:

   $a)$ $(2-3i)(-2+i)$ $[-1+8i]$

   $b)$ $\dfrac{1+2i}{3-i}+\dfrac{2-i}{5i}$ $[-\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i]$

   $c)$ $(1-i)^4$ $[-4]$

   $d)$ $\dfrac{(1+i)^2}{3-4i}$ $[-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i]$

3. Verificare che $z = i\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ soddisfa l'equazione $z^2 - iz + 1 = 0$.

4. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi :

   $a)$ $\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{2i}{i-1}$ $[\sqrt{\frac{5}{2}}]$

   $b)$ $\dfrac{3-i}{(1+i)^2}-\dfrac{1}{1-i}$ $[\sqrt{5}]$

   $c)$ $\left(\dfrac{1-3i}{1+i}-i\right)^3$ $[10\sqrt{10}]$

5. Mettere in forma trigonometrica e in forma esponenziale i seguenti numeri complessi

   $a)$ $z=-1$ $[z=\cos\pi+i\sin\pi\ ;\ z=e^{i\pi}]$

   $b)$ $z=i(1+i)$ $[z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\ ;\ z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}]$

   $c)$ $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ $[z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\ ;\ z=e^{i\frac{\pi}{2}}]$

   $d)$ $z=\dfrac{i(i-1)}{(i+1)^2}$ $[z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\ ;\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}]$

   $e)$ $z=\dfrac{3}{\left(-1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^4}$ $[z=\frac{27}{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\ ;\ z=\frac{27}{16}e^{i\frac{2\pi}{3}}]$

6. Scrivere in forma esponenziale e in forma algebrica i numeri complessi :

z^4 , z^7 , z^{34} , dove:

$a)$ $z = \dfrac{1}{(1-i)^2} - i$ $\left[z^4 = \frac{1}{16}\ e^{i\cdot 0} = \frac{1}{16}\ ;\ z^7 = \frac{1}{128}\ e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{128}\ i\ ;\ z^{34} = \frac{1}{2^{34}}\ e^{i\pi} = -\frac{1}{2^{34}} \right]$

$b)$ $z = \dfrac{1-i}{i}$ $\left[z^4 = 4e^{i\pi} = -4\ ;\ z^7 = 8\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = 8(-1+i)\ ;\ z^{34} = 2^{17}\ e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{17}\cdot i \right]$

7. Trovare le radici dei seguenti numeri complessi e disegnarle sul piano di Gauss.

$a)$ $(2i)^{\frac{1}{2}}$ $[1+i\ ;\ -1-i]$

$b)$ $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ $\left[\pm\sqrt[6]{5}\ ;\ \pm\frac{\sqrt[6]{5}}{2}(1+i\sqrt{3})\ ;\ \pm\frac{\sqrt[6]{5}}{2}(-1+i\sqrt{3}) \right]$

$c)$ $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$ $\left[\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+i)\ ;\ \pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3}) \right]$

8. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni delle seguenti equazioni:

$a)$ $z^2 + i\sqrt{3}z + 6 = 0$ $[i\sqrt{3}\ ;\ -2i\sqrt{3}]$

$b)$ $(z+i)^2 = (\sqrt{3}+i)^3$ $[2+i\ ;\ -2-3i]$

$c)$ $z^6 + z^3 + 1 = 0$ $\left[e^{i\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\ ,\ k = 0,1,2\ ;\ e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\ ,\ k = 0,1,2 \right]$

$d)$ $|z|^2 z^2 = i$ $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \right]$

$e)$ $z + i\overline{z}^2 = -2i$ $[-i\ ;\ 2i]$

$f)$ $z^3 = 2\overline{z}$ $[0\ ;\pm\sqrt{2}\ ;\ \pm i\sqrt{2}]$

$g)$ $z^2 + i\overline{z} = 1$ $\left[\frac{1}{2}(\pm\sqrt{7} - i) \right]$

$h)$ $z^2 + i\sqrt{5}|z| + 6 = 0$ $\left[\pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1 - i\sqrt{5}) \right]$

$i)$ $|z|^2 + 5z + 10i = 0$ $\left[-4-2i\ ;\ -1-2i \right]$

9. Risolvere e rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni dei seguenti sistemi:

$a)$ $\begin{cases} z^4 - z^2 + 1 = 0 \\ \text{Re }(z) \geq 0 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i) \right]$

$b)$ $\begin{cases} |z| = \dfrac{1}{2} \\ \text{Re }\left(z - \dfrac{1}{z}\right) = 0 \end{cases}$ $\left[\pm\frac{1}{2}i \right]$

10. E' data la funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ così definita : $f(z) = \dfrac{2i - z}{1 - iz}$.

   a) Trovare tutti gli $z \in \mathbf{C}$ per cui $f(z) = z$. $[z = i(-1 \pm \sqrt{3})]$

   b) Trovare le controimmagini di $1 - 3i$. $[z = -\frac{1}{5}(3 + 11i)]$

11. Trovare il polinomio a coefficienti reali di grado minimo che abbia uno zero doppio in $z = 1$ e uno zero semplice in $z = 2 + i$ e che valga 10 quando $z = 0$.

   $[p(z) = 2(z-1)^2(z^2 - 4z + 5)]$

12. E' dato il polinomio $p(z) = z^3 - iz^2 + 3iz + 3$.

   Verificare che $z = i$ è una radice. Fattorizzare $p(z)$ (su $\mathbf{C}$)

   $$\left[p(z) = (z - i)\left(z - \sqrt{\tfrac{3}{2}}(1 - i)\right)\left(z + \sqrt{\tfrac{3}{2}}(1 - i)\right)\right]$$

13. E' dato il polinomio $p(z) = z^4 - 2z^3 + 21z^2 - 32z + 80$.

   Verificare che $z = 4i$ è una sua radice. Fattorizzare $p(z)$ su $\mathbb{R}$ e su $\mathbf{C}$.

   $[p(z) = (z^2 + 16)(z^2 - 2z + 5) \ ; \ p(z) = (z - 4i)(z + 4i)(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)]$