SVILUPPI DI TAYLOR

Test di autovalutazione

1. Sia f una funzione derivabile infinite volte su $\mathbf{R}$, il cui sviluppo di MacLaurin è dato da $f(x) = x^3 - 3x^4 + o(x^4)$. Allora:
   (a) f non ha punti di massimo o di minimo
   (b) f è strettamente crescente nel suo dominio
   (c) $f'''(0) = 6$
   (d) f ha un punto di minimo in $x = 0$.

2. Sia f una funzione infinitesima per $x \to -2$, derivabile due volte in un intorno di $x = -2$ e con un punto critico in $x = -2$. Allora:
   (a) $f(x) = o((x + 2)^2)$, , per $x \to -2$
   (b) $\lim_{x\to-2} \dfrac{f(x)}{(x + 2)^2} = k \in \mathbf{R}$
   (c) $f(x) = o((x + 2)^3)$, , per $x \to -2$
   (d) $f(x)$ in $x = -2$ ha un punto di massimo o di minimo relativo

3. La funzione $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 - x}$
   (a) ha come polinomio di MacLaurin del secondo ordine $T_2(x) = x + 3x^2$
   (b) ha un punto di stazionarietà in $x_0 = 0$
   (c) $f(x) = o(x)$
   (d) $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x) - x}{x^2} = \dfrac{3}{2}$

4. E' data la funzione $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 - x}$. Allora:
   (a) $f(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$
   (b) non ha punti a tangente orizzontale
   (c) ha un punto di max relativo in $x_0 = 0$
   (d) la tangente al grafico di f in O è la retta $y = x$.

5. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Allora:
   (a) $f(x)$ ha ordine di infinitesimo 2 per $x \to 0$
   (b) $f(x) = o(x^2)$, per $x \to 0$
   (c) 0 è un punto di flesso per f
   (d) 0 è un punto di massimo o di minimo relativo per f

6. Sia $f \in C^4(\mathbb{R})$ tale che $f(2) = 0$ e f abbia ordine di infinitesimo 3 per $x \to 2$. Allora:
   (a) $f'(2) \neq 0$
   (b) $f'(2) = 0\,,\ f''(2) \neq 0$
   (c) $f'(2) = 0\,, f''(2) = 0\ ,\ f'''(2) \neq 0$
   (d) $f'(2) = 0\ ,\ f'(2) = 0\ ,\ f'''(2) = 0$

7. E' data la funzione $f(x) = \sin^2 x + 2 - 2\cosh x$. Allora:
   (a) lo sviluppo di MacLaurin è $f(x) = x^4 + o(x^4)$
   (b) è infinitesima di ordine superiore al terzo, per $x \to 0$
   (c) ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$
   (d) ha come tangente in 0 la retta $y = x$

8. E' data la funzione $f(x) = \sin^2 x + 2 - 2\cosh x$. Allora:
   (a) lo sviluppo di MacLaurin è $f(x) = -\frac{5}{3}x^4 + o(x^4)$
   (b) $f(x) = o(x^4)$, per $x \to 0$
   (c) esiste un intorno di $x = 0$ in cui è positiva
   (d) ha come tangente in 0 la retta $y = 0$

9. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin x}$
   (a) è dispari
   (b) per $x \to 0$, $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$
   (c) per $x \to 0$, $f(x) = o(x)$
   (d) in $x = 0$ ha un punto a tangente verticale

-

10. Sia $f \in C^{(3)}([1, 3])$ e sia $f(x) = 3 + (x-2) - 2(x-2)^2 + o((x-2)^3)$ per $x \to 2$. Allora:
   (a) $f''(2) = -1$
   (b) f ha ordine di infinitesimo 2, per $x \to 2$
   (c) $f''(2) = -4$ e $f'''(2) = 0$
   (d) il polinomio di Taylor di f di grado 3 centrato in $x = 2$ non esiste

11. Data $f(x) = x \sin x - x^2$:
   (a) $f(x) = o(x^3)$
   (b) f ha un punto di minimo in $x = 0$
   (c) esiste un intervallo in cui f è positiva
   (d) $f(x) \sim x^4$, per $x \to 0$

12. Data $f(x) = \log{(2x^2 - x)}$:
   (a) la tangente al grafico di f nel punto P(1, 0) ha equazione $y = 3(x - 1)$
   (b) la parabola osculatrice ad f in $x_0 = 1$ ha equazione $y = 3(x-1) - 5(x-1)^2$
   (c) f è sviluppabile in serie di Mc Laurin
   (d) f non è sviluppabile in serie di Taylor con centro nel punto $x_0 = -1$

RISPOSTE

1. RISPOSTA ESATTA: (c).

   Infatti, il coefficiente di x^3 dello sviluppo di MacLaurin è dato da $\frac{f'''(0)}{3!}$. Nel nostro caso $\frac{f'''(0)}{3!} = 1$ e dunque $f'''(0) = 6$.

   La funzione $f(x)$ in $x = 0$ è equivalente alla funzione x^3 e quindi ha un punto di flesso a tangente orizzontale. Dunque (d) è falsa.

   La funzione $f(x) = x^3 - 3x^4$ ha sviluppo di MacLaurin $f(x) = x^3 - 3x^4 + o(x^n)$, $\forall n \geq 4$. Essa fornisce un controesempio alle affermazioni (a) e (b) in quanto ha un punto di massimo nel punto $x = \frac{1}{4}$.

2. RISPOSTA ESATTA: (b).

   Dai dati del problema, lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di $f(x)$ centrato in $x_0 = -2$ risulta $f(x) = k(x+2)^2 + o((x+2)^2)$, per $x \to -2$.

   Pertanto $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2} \frac{k(x+2)^2 + o((x+2)^2)}{(x+2)^2} = k$.

   Le risposte (a) e (c) sono errate in quanto può essere $k = 0$ oppure $k \neq 0$.

   La (d) non è necessariamente vera, in quanto dipende dal valore di k.

3. RISPOSTA ESATTA: (d).

   Calcoliamo lo sviluppo di MacLaurin di ordine 2 di f(x):
   $$\frac{e^x - 1}{1-x} = (e^x - 1)\cdot\frac{1}{1-x} = \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 + x + x^2 + o(x^2)) = x + \frac{3x^2}{2} + o(x^2)$$
   Dunque (a) è errata . Inoltre $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$, e (d) è esatta.

   (b) è errata perché $f'(0) = 1$ e dunque $x = 0$ non è un punto di stazionarietà di f.

   (c) è errata, perché $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 \neq 0$.

4. RISPOSTA ESATTA: (d). Lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di f(x) risulta:
   $$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) = x + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{3} + o(x^3)$$

   Pertanto la risposta (a) è errata ; la risposta(c) è errata, perché $f'(0) = 1$. Invece la risposta (d) è esatta.

   La risposta (b) è errata, perché effettuando la derivata prima di f si vede (discutendola graficamente) che essa si annulla due volte.

5. RISPOSTA ESATTA: (b).

Lo sviluppo di MacLaurin di f di ordine 2 è: $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$, per $x \to 0$. Pertanto $f(x) = o(x^2)$, per $x \to 0$, e dunque ha ordine di infinitesimo superiore al secondo. Quindi la risposta (b) è esatta mentre la risposta (a) è errata.

Non si può asserire se 0 è un punto di flesso, o un punto di massimo o minimo relativo per f; ad esempio se la prima derivata non nulla di f calcolata in 0 è di ordine dispari, la risposta (c) è giusta, mentre se è di ordine pari la risposta (d) è giusta.

6. RISPOSTA ESATTA: (c).

Se $f'(2) \neq 0$, l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 2$ è 1.

Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) \neq 0$, l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 2$ è 2.

Se $f'(2) = 0$, $f''(2) = 0$, $f'''(2) \neq 0$, l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 2$ è 3.

Se $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$, l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 2$ è superiore a 3.

7. RISPOSTA ESATTA: (b).

Calcoliamo lo sviluppo di MacLaurin di f:

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + 2 - 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) = -\frac{5x^4}{12} + o(x^4)$$

Dunque (b) è vera mentre (a) è falsa.

Inoltre $f(x)$ è localmente equivalente (per $x \to 0$) alla funzione $-\frac{5x^4}{12}$. Dunque $f(x)$ ha in $x = 0$ un punto di massimo locale e la tangente in 0 è la retta $y = 0$. Pertanto le risposte (c) e (d) sono errate.

8. RISPOSTA ESATTA: (d).

Abbiamo calcolato nel test precedente lo sviluppo di MacLaurin di f:

$$f(x) = -\frac{5x^4}{12} + o(x^4)$$

Dunque (d) è vera mentre (a) e (b) sono false.

Inoltre $f(x)$ è localmente equivalente (per $x \to 0$) alla funzione $-\frac{5x^4}{12}$. Dunque $f(x)$ in un intorno di $x = 0$ è negativa. Pertanto la risposta (c) è errata.

9. RISPOSTA ESATTA: (b).

$f(x)$ non è dispari perché $f(-x) = \sqrt[3]{1 - \sin x} \neq -f(x)$.

Calcoliamo lo sviluppo di MacLaurin di f:

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{9}\sin^2 x + o(x^2) =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{3}(x + o(x^2)) - \tfrac{1}{9}\left(x + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) = 1 + \tfrac{x}{3} - \tfrac{x^2}{9} + o(x^2)$$

Dunque (b) è vera mentre (c) e (d) sono false.

10. RISPOSTA ESATTA: (c).

Ci viene assegnato lo sviluppo di Taylor di f di ordine 3 centrato nel punto $x = 2$. Da esso deduciamo che:

$f(2) = 3,\ f'(2) = 1,\ f''(2) = -4,\ f'''(2) = 0.$

Pertanto la risposta (a) è errata e la (c) è esatta. La (b) è errata, in quanto f non è infinitesima per $x \to 2$.

Inoltre il polinomio di Taylor del terzo ordine di f centrato nel punto $x = 2$ esiste e risulta : $T_3(x) = 3 + (x-2) - 2(x-2)^2 + 0(x-2)^3 = 3 + (x-2) - 2(x-2)^2$.

11. RISPOSTA ESATTA: (a).

Calcoliamo lo sviluppo di MacLaurin di f:

$$f(x) = x\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x^2 = -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

Dunque $f(x)$ è localmente equivalente a $-\ \frac{1}{6}x^4$ e quindi ha un punto di massimo relativo. Pertanto (a) è vera mentre (b), (c) e (d) sono false.

12. RISPOSTA ESATTA: (a).

La funzione f è derivabile infinite volte in $x = 1$. Calcolando le derivate successive di f in $x = 1$ si trova:

$f(1) = 0\ ,\ f'(1) = 3\ ,\ f''(1) = -5$

Pertanto lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di f centrato in $x_0 = 1$ risulta:

$f(x) = 3(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \quad$ per $x \to 1$.

Dunque la tangente al grafico di f nel punto P(1,0) risulta la retta di equazione $y = 3(x-1)$, e la parabola osculatrice in P ha equazione $y = 3(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2$.

f non è sviluppabile in serie di MacLaurin, in quanto $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$. Invece è sviluppabile in serie di Taylor con centro in $x_0 = -1$, perché è derivabile infinite volte in $x_0 = -1$.