Sviluppi di Taylor
Esercizi proposti

Esercizio 1

Calcolare lo sviluppo di Taylor (con resto di Peano) delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato e all'ordine n indicato:

1. $f(x) = 2^x \quad (x_0 = 2,\ n = 3)$
   Soluzione: $f(x) = 4 + 4\ln 2(x-2) + 2\ln^2 2(x-2)^2 + \dfrac{2}{3}\ln^3 2(x-2)^3 + o((x-2)^3)$
2. $f(x) = \log(2-x) \quad (x_0 = 1,\ n = 3)$
   Soluzione: $f(x) = -(x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$
3. $f(x) = \sin x \quad (x_0 = \frac{\pi}{3},\ n = 2)$
   Soluzione: $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)$

Esercizio 2

Calcolare lo sviluppo di Taylor (con resto di Peano) delle seguenti funzioni nel punto $x_0 = 0$ e all'ordine n indicato:

1. $f(x) = \sin^2 x \quad (n = 6)$ $\qquad f(x) = x^2 + \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{2x^6}{45} + o(x^6)$
2. $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2) \quad (n = 4)$ $\qquad f(x) = -\dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$
3. $f(x) = (e^x - 1)^2 \quad (n = 5)$ $\qquad f(x) = x^2 + x^3 + \dfrac{7x^4}{12} + \dfrac{x^5}{4} + o(x^5)$
4. $f(x) = \log(1 - \sin^2 x) \quad (n = 4)$ $\qquad f(x) = -x^2 - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3x - x^2} \quad (n = 4)$ $\qquad f(x) = 1 - 3x + 10x^2 - 33x^3 + 109x^4 + o(x^4)$
6. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x} \quad (n = 3)$ $\qquad f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$
7. $f(x) = \log(2 - \cos x) \quad (n = 4)$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$
8. $f(x) = \cos(\log(1 + x)) \quad (n = 4)$ $\qquad f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{5x^4}{12} + o(x^4)$

Esercizio 3

Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = e^{-x\cos x} + \sin x - \cos x \quad (x \to 0)$ $\qquad$ p.p. $= x^2$; ord. $= 2$
2. $f(x) = \sin x(\cos 3x - 1); \quad (x \to 0)$ $\qquad$ p.p. $= -\dfrac{9x^3}{2}$; ord $= 3$
3. $f(x) = e^{\cos x} - e^{\cosh x}; \quad (x \to 0)$ $\qquad$ p.p. $= -ex^2$; ord $= 2$
4. $f(x) = \tan x\,(x - \log(1 + x)) \quad (x \to 0)$ $\qquad$ p.p. $= \dfrac{x^3}{2}$; ord $= 3$
5. $f(x) = \sin(\sinh x) - x\cos(x^2) \quad (x \to 0)$ $\qquad$ p.p. $= \dfrac{13x^5}{30}$; ord $= 5$
6. $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - x^2/2} \quad (x \to 0)$ $\qquad$ p.p. $= \dfrac{x^4}{48}$; ord $= 4$

Esercizio 4
Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \sin x}{x^3}$ $\qquad l = \frac{1}{3}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - \sin x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$ $\qquad l = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2 + \cos(3x) - 3\cosh x)^4}{\log(1 + x^2)}$ $\qquad l = 0$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$ $\qquad l = \frac{1}{3}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^2 \log(\cos x)}$ $\qquad l = \frac{2}{3}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}$ $\qquad l = -\frac{9}{5}$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1 + x^8} - \sqrt[3]{1 + x^8}}$ $\qquad l = -3$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin x - x^2}{\sqrt{1 + x^4} - \cos(x^2)}$ $\qquad l = \frac{1}{6}$
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ $\qquad l = -\frac{e}{2}$
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad l = \frac{1}{6}$