COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 30 Gennaio 2009

C

ESERCIZIO 1. (6 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1+x^3} - \sinh 2x + kx^2$.

(a) determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $f(x)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$;

(c) posto $k = 2$, studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{7/2}} dx$.

ESERCIZIO 2. (12 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 27}{2x}}$. Si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) studiare la derivabilità della funzione;

(c) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

(e) determinare l'intervallo massimale contenente il punto $x = -8$ in cui $f(x)$ è invertibile.

ESERCIZIO 3. (5 punti) Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln 4x}{(x+7)^2}$

(a) calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int f(x)\,dx$

(b) determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)$ che si annulla nel punto $x = 1/4$.

ESERCIZIO 4. (6 punti)

(a) Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e tale che $f(x) = -2x^5 + 5x^7 + o(x^7)$ per $x \to 0$; determinare $f^{(v)}(0)$ e $f^{(vi)}(0)$.

(b) Determinare le soluzioni dell'equazione $4z^2 + 4z + 1 + i = 0$.

(c) Siano f, g e h tre funzioni definite in un intorno del punto x_0 e tali che $f = o(h)$ e $g = o(h)$ per $x \to x_0$. Dire se è vero oppure falso che $2f - 7g = o(h)$ per $x \to x_0$, giustificando la risposta. **VERO** **FALSO**

TEORIA (5 punti)

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

b) La funzione f è di classe $C^{(2)}$ nell'intervallo $I = (-5, 0)$ e $f(-4) = f(-2) = f(-1) = 6$; dimostrare che esiste almeno un punto $\bar{x} \in I$ tale che $f''(\bar{x}) = 0$.