

**Esame di ANALISI MATEMATICA I - 30 Gennaio 2009**



**ESERCIZIO 1. (6 punti)** Si consideri la funzione  $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1+x^3} - \sinh 2x + kx^2$ .

(a) determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per  $f(x)$ , al variare di  $k \in \mathbb{R}$ ;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di  $f(x)$ , al variare di  $k \in \mathbb{R}$ ;

(c) posto  $k = 2$ , studiare la convergenza dell'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{7/2}} dx$ .

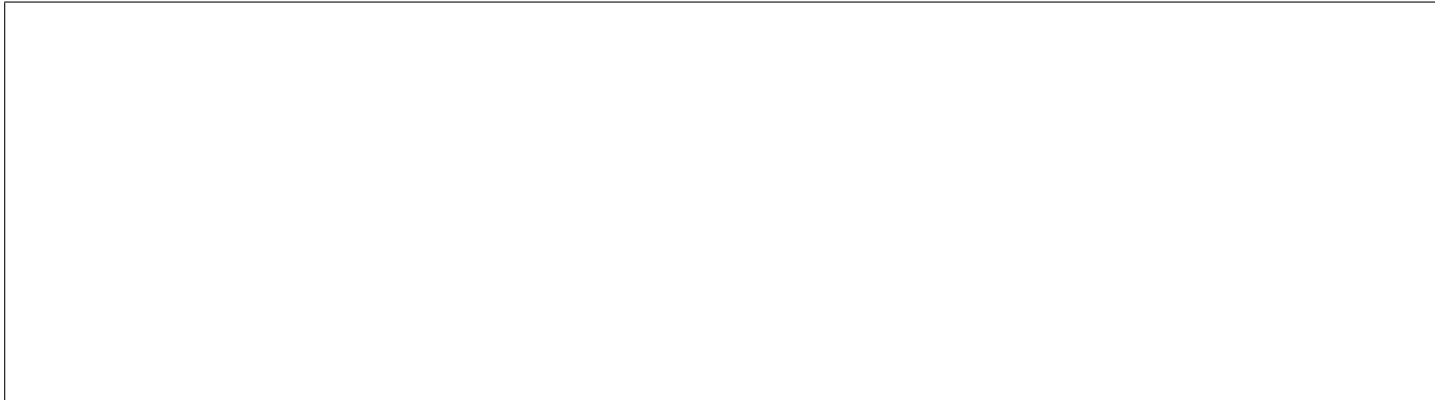
**ESERCIZIO 2. (12 punti)** Si consideri la funzione  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{2x}}$ . Si chiede di:

(a) determinare il dominio di  $f(x)$ , trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

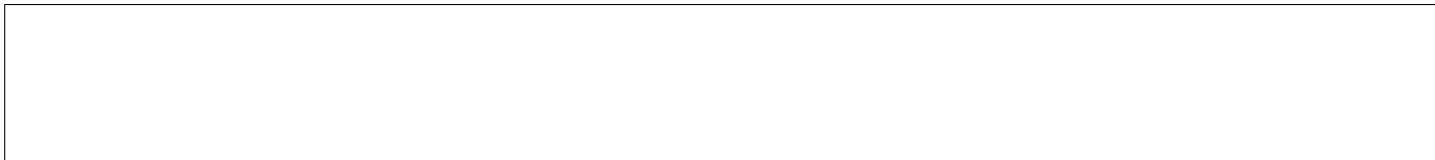
(b) studiare la derivabilità della funzione;

(c) determinare gli intervalli di monotonia di  $f(x)$  e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico qualitativo di  $f(x)$  utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

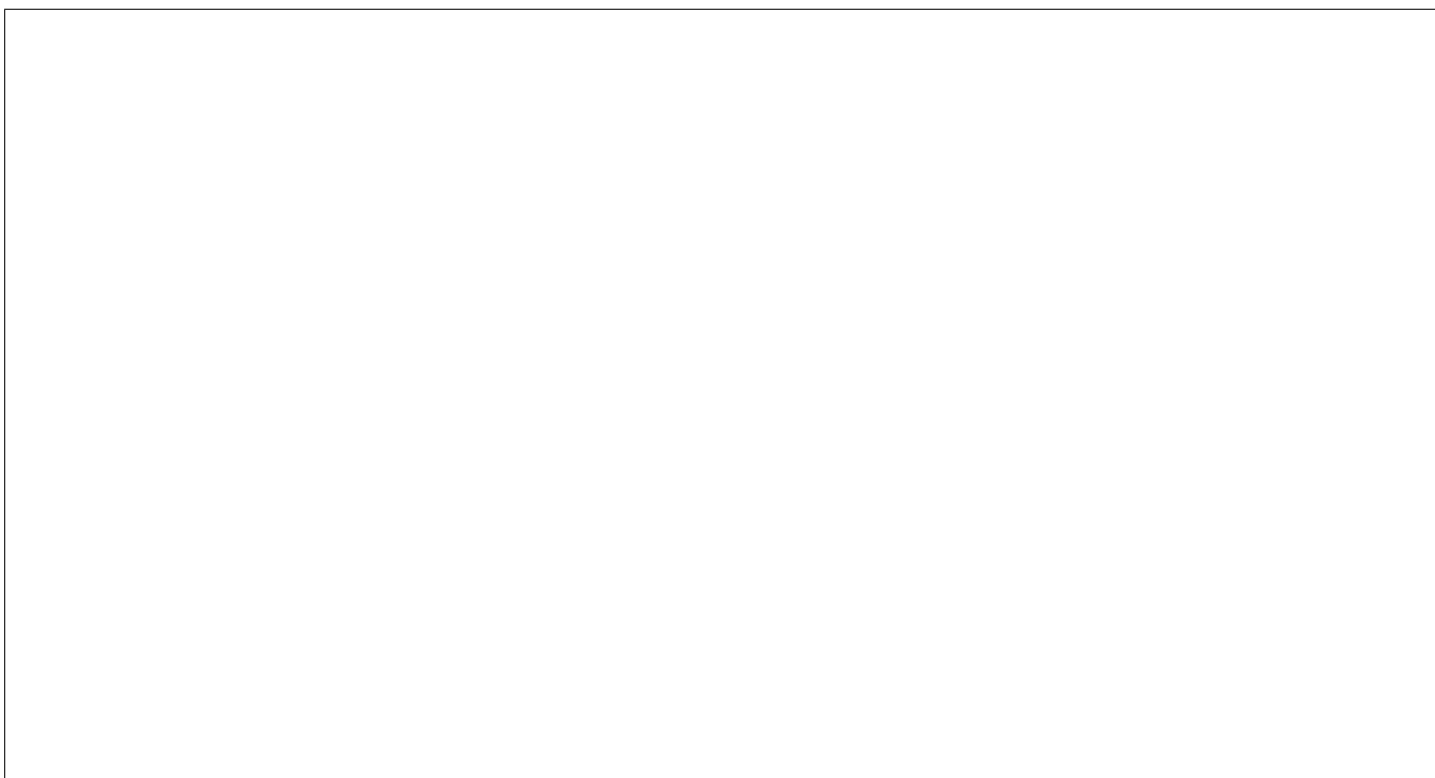


(e) determinare l'intervallo massimale contenente il punto  $x = -8$  in cui  $f(x)$  è invertibile.




**ESERCIZIO 3. (5 punti)** Data la funzione  $f(x) = \frac{\ln 4x}{(x+7)^2}$

(a) calcolare l'integrale indefinito  $\int f(x) dx$



(b) determinare la primitiva  $F(x)$  della funzione  $f(x)$  che si annulla nel punto  $x = 1/4$ .



**ESERCIZIO 4. (6 punti)**

(a) Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  e tale che  $f(x) = -2x^5 + 5x^7 + o(x^7)$  per  $x \rightarrow 0$ ; determinare  $f^{(v)}(0)$  e  $f^{(vi)}(0)$ .

(b) Determinare le soluzioni dell'equazione  $4z^2 + 4z + 1 + i = 0$ .

(c) Siano  $f, g$  e  $h$  tre funzioni definite in un intorno del punto  $x_0$  e tali che  $f = o(h)$  e  $g = o(h)$  per  $x \rightarrow x_0$ . Dire se è vero oppure falso che  $2f - 7g = o(h)$  per  $x \rightarrow x_0$ , giustificando la risposta. **VERO** **FALSO**

**TEORIA (5 punti)**

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

b) La funzione  $f$  è di classe  $C^{(2)}$  nell'intervallo  $I = (-5, 0)$  e  $f(-4) = f(-2) = f(-1) = 6$ ; dimostrare che esiste almeno un punto  $\bar{x} \in I$  tale che  $f''(\bar{x}) = 0$ .