

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 28 Gennaio 2008

B

**ESERCIZIO 1. (6 punti)** Si consideri la funzione  $f(x) = (2\alpha - 3x^2) \sinh 2x - 2x^2 e^{\sqrt{2}x} - 8x + \alpha x^2$ .

(a) determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per  $f(x)$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di  $f(x)$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

(c) determinare il valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui il punto  $x = 0$  è un punto di stazionarietà per  $f(x)$  e indicarne la natura (punto di massimo, minimo o flesso).

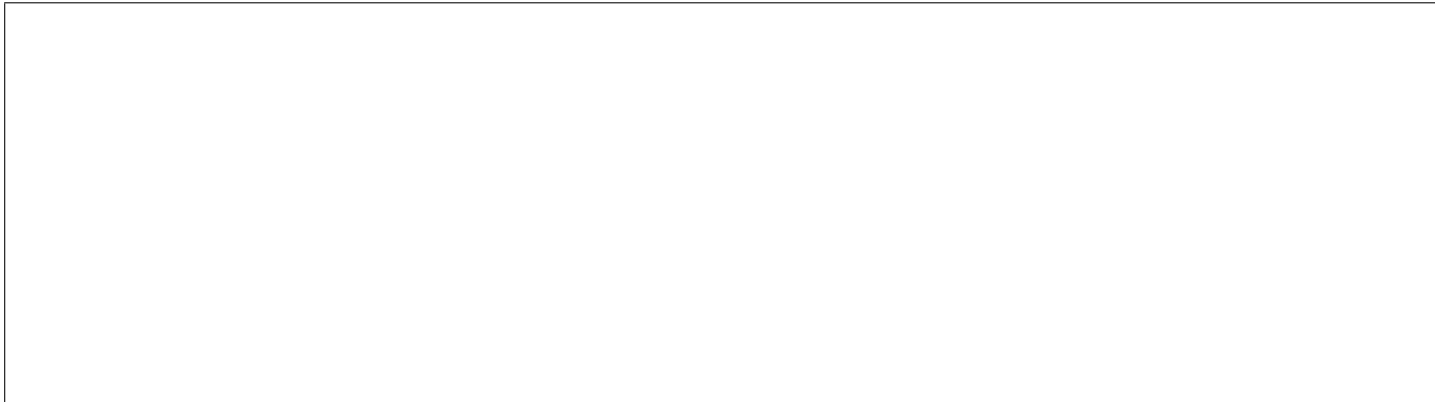
**ESERCIZIO 2. (10 punti)** Si consideri la funzione  $f(x) = \sqrt{3 - \frac{6}{\ln x}}$ . Si chiede di:

- (a) determinare il dominio di  $f(x)$ , mostrando, in particolare, che è l'unione di due intervalli disgiunti; trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

- (b) studiare la derivabilità della funzione;

- (c) determinare gli intervalli di monotonia di  $f(x)$  e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico qualitativo di  $f(x)$  utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

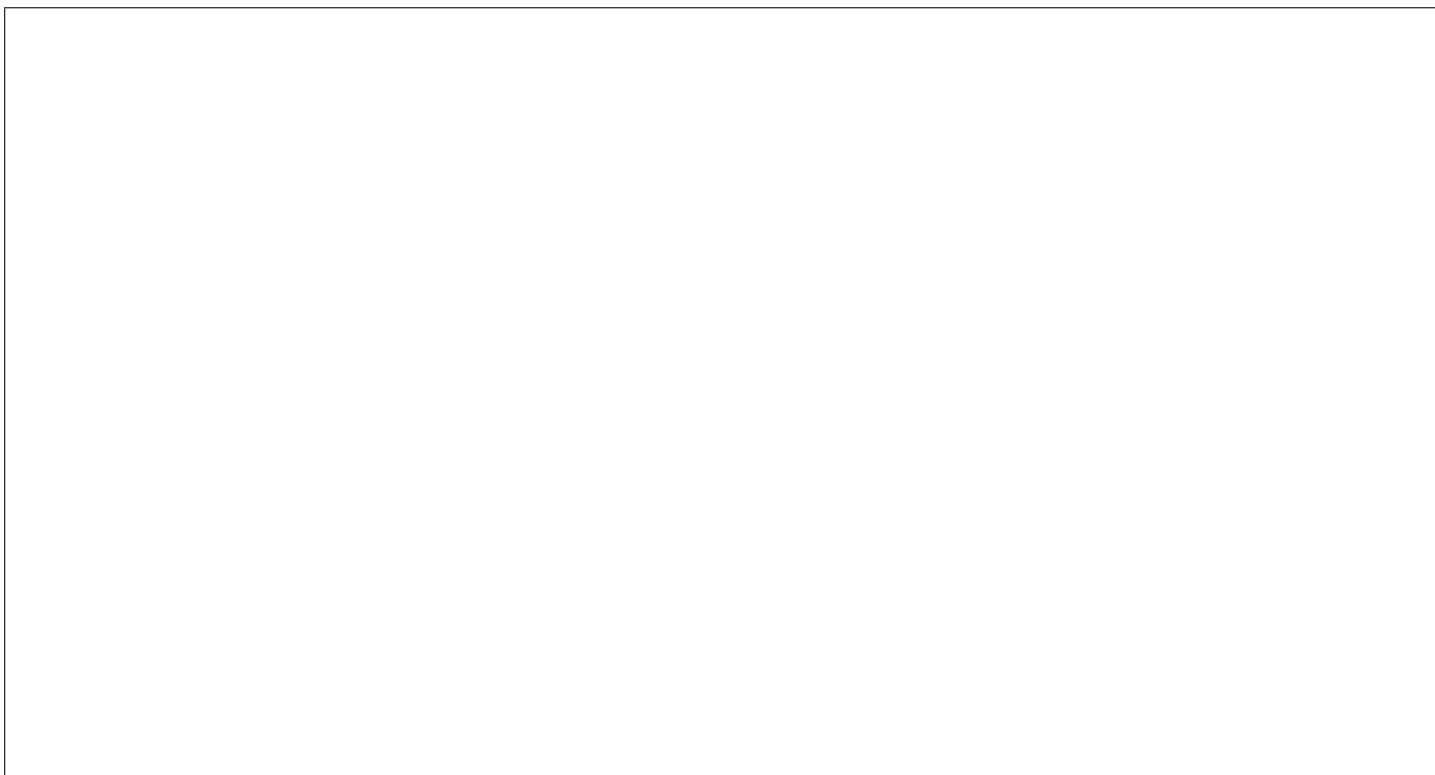


(e) determinare l'insieme immagine di  $f(x)$ .

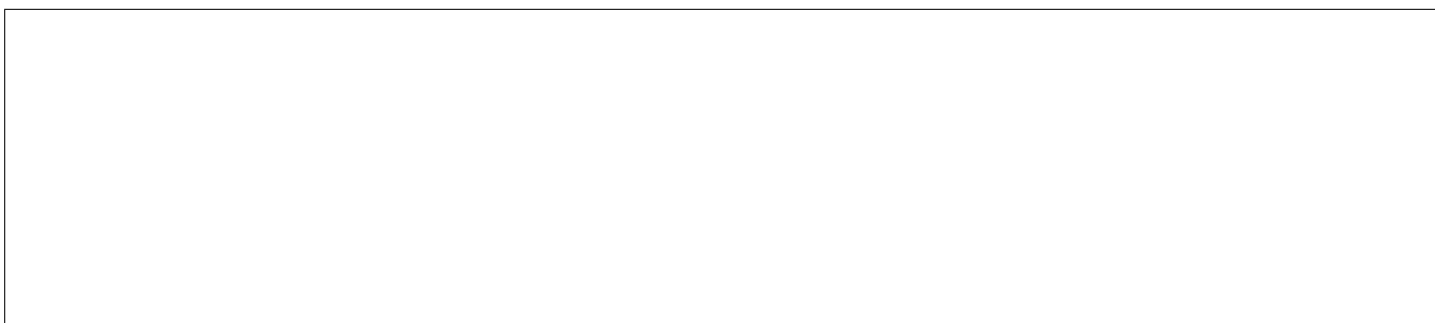


**ESERCIZIO 3. (7 punti)** Data la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln(3x + 7)$

(a) calcolare l'integrale indefinito  $\int f(x) dx$



(a) calcolare l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$



**ESERCIZIO 4. (6 punti)**

Provare o confutare le seguenti affermazioni:

(a) Sia  $f(x)$  una funzione definita in un intorno di 0 tale che  $f(x) = o(x^2)$ , per  $x \rightarrow 0$ ,Allora  $2f(x) + 4 \sin^5 x + x^4 - x = o(x^2)$ , per  $x \rightarrow 0$ . **VERO** **FALSO**(b) L'equazione  $\frac{z+3}{z+3i} = 1-i$  ha un'unica soluzione reale. **VERO** **FALSO**(c) La funzione  $y(x) = e^x - e^{5x} + 6 \sin 3x$  è una soluzione su  $\mathbb{R}$  dell'equazione differenziale  $y'' - 3y' + 2y = 2 \sin 3x$ . **VERO** **FALSO**

**TEORIA (5 punti)**

a) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.

b) Sia  $I = [0, +\infty)$ ; sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile su  $I$  per cui esiste una costante  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $f'(x) \leq M, \forall x \in I$ .  
Provare che

$$f(x) \leq Mx + f(0), \quad \forall x \in I$$