COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 28 Gennaio 2008

B

ESERCIZIO 1. (6 punti) Si consideri la funzione $f(x) = (2\alpha - 3x^2)\sinh 2x - 2x^2 e^{\sqrt{2}x} - 8x + \alpha x^2$.

(a) determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $f(x)$, al variare di $\alpha \in I\!R$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$, al variare di $\alpha \in I\!R$;

(c) determinare il valore di $\alpha \in R$ per cui il punto $x = 0$ è un punto di stazionarietà per $f(x)$ e indicarne la natura (punto di massimo, minimo o flesso).

ESERCIZIO 2. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{3 - \dfrac{6}{\ln x}}$. Si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, mostrando, in particolare, che è l'unione di due intervalli disgiunti; trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) studiare la derivabilità della funzione;

(c) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

(e) determinare l'insieme immagine di $f(x)$.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln(3x+7)$

(a) calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\,dx$

(a) calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

ESERCIZIO 4. (6 punti)
Provare o confutare le seguenti affermazioni:

(a) Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di 0 tale che $f(x) = o(x^2)$, per $x \to 0$,
Allora $2f(x) + 4\sin^5 x + x^4 - x = o(x^2)$, per $x \to 0$.

VERO **FALSO**

(b) L'equazione $\dfrac{z+3}{z+3i} = 1 - i$ ha un'unica soluzione reale.

VERO **FALSO**

(c) La funzione $y(x) = e^x - e^{5x} + 6\sin 3x$ è una soluzione su $\mathbb{R}$ dell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 2\sin 3x$.

VERO **FALSO**

TEORIA (5 punti)

a) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.

b) Sia $I = [0, +\infty)$; sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I per cui esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) \leq M$, $\forall x \in I$. Provare che

$$f(x) \leq Mx + f(0), \quad \forall x \in I$$