ANALISI MATEMATICA I (Versione A) - 24 Novembre 2000

RISOLUZIONE

ESERCIZIO 1. *Data la funzione* $f(x) = (e^{2x} - 1)^2 - \log(1 + 4x^2)$:

1. *Calcolare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin di* $f(x)$.

Scriviamo gli sviluppi di ordine 3 di e^{2x}, di $(e^{2x}-1)^2$ e di $\log(1+4x^2)$:

$$e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$(e^{2x}-1)^2 = \left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 = 4x^2 + 8x^3 + o(x^3)$$

$$\log(1+4x^2) = 4x^2 + o(x^3)$$

Effettuando la differenza tra i due sviluppi sopra scritti, troveremo lo sviluppo richiesto :

$$\boxed{f(x) = 8x^3 + o(x^3)}$$

2. *Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di* $f(x)$ *per* $x \to 0$.

Per $x \to 0$, si è visto che $f(x) = 8x^3 + o(x^3)$, e dunque $f(x) \sim 8x^3$. Pertanto :

$$\boxed{\text{la parte principale di } f(x) \text{ è } \ h(x) = 8x^3 \quad \text{e il suo ordine di infinitesimo è 3}}$$

3. *Determinare* $f'''(0)$.

Il coefficiente di x^3 del polinomio di McLaurin di una generica funzione $f(x)$ vale $\dfrac{f'''(0)}{3!}$.

Nel nostro caso $\dfrac{f'''(0)}{3!} = 8$ e dunque:

$$\boxed{f'''(0) = 48}$$

4. *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di* f *nel punto* $O = (0,0)$.

La retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto corrispondente ad $x_0 = 0$ ha equazione $y = T_1(x)$, dove $T_1(x)$ è il polinomio di McLaurin di grado 1 di $f(x)$. Quindi:

$$\boxed{\text{la retta tangente al grafico di } f(x) \text{ nel punto corrispondente ad } x_0 = 0 \text{ ha equazione } y = 0}$$

5. *Calcolare il seguente limite*: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3 x}$

Visto che si tratta del limite per $x \to 0$, possiamo sostituire ad $f(x)$ il suo sviluppo di McLaurin trovato in precedenza. Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^3 + o(x^3)}{\sin^3 x}$$

Utilizzando il principio di eliminazione dei termini trascurabili , possiamo trascurare a numeratore l'addendo $o(x^3)$; inoltre possiamo sostituire a denominatore la funzione $\sin^3 x$ con la funzione x^3 , che le è equivalente per $x \to 0$. Pertanto otteniamo:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^3}{x^3} = 8}$$

ESERCIZIO 2. *Data la funzione*:

$$f(x) = (-x^2 + 4x - 1) \cdot e^{-x}$$

1. *Determinare il dominio D di f, i limiti di $f(x)$ agli estremi del dominio D e gli eventuali asintoti.*

La funzione $f(x)$ è prodotto di due funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Dunque:

$$\boxed{D = \text{ Dom } (f) = \mathbb{R}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^2 + 4x - 1) \cdot e^{-x} = (-\infty) \cdot e^{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 + 4x - 1}{e^x} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0^-$$

in quando l'ordine di infinito del denominatore prevale su quello del numeratore.

Pertanto: $\boxed{\text{la retta } y = 0 \text{ è asintoto orizzontale destro di } f}$

- non esistono asintoti verticali (perché Dom $(f) = \mathbb{R}$ ed f è continua su $\mathbb{R}$)
- non esistono asintoti obliqui (a destra è ovvio; a sinistra non esistono perché $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$)

2. *Calcolare la derivata prima di f e determinarne il segno.*

Calcoliamo la derivata di f, vista come prodotto di due fattori:

$$f'(x) = (-2x + 4)e^{-x} + (-x^2 + 4x - 1)e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(-2x + 4 + x^2 - 4x + 1) \ .$$

Dunque: $\boxed{f'(x) = e^{-x}(x^2 - 6x + 5)}$

Troviamone gli zeri e il segno:

$$\begin{array}{lcccl} f'(x) = 0 & \iff & x^2 - 6x + 5 = 0 & \iff & (x = 1) \vee (x = 5) \\ f'(x) > 0 & \iff & x^2 - 6x + 5 > 0 & \iff & (x < 1) \vee (x > 5) \\ f'(x) < 0 & \iff & x^2 - 6x + 5 < 0 & \iff & 1 < x < 5 \end{array}$$

3. *Determinare gli intervalli di monotonia e gli estremi (massimi e minimi relativi e assoluti) di f.*

Dallo studio degli zeri e del segno di f' possiamo dedurre che:

- $f(x)$ è monotona crescente in $]-\infty\,, 1\,[$ e in $]\,5\,, +\infty[$
- $f(x)$ è monotona decrescente in $]\,1\,, 5\,[$

Pertanto $x = 1$ è un punto di massimo e $x = 5$ è un punto di minimo.

Per decidere se sono relativi o assoluti, calcoliamo le loro ordinate : $f(1) = \frac{2}{e}$, $f(5) = -\frac{6}{e^5}$.
Tenendo presente i due limiti agli estremi del dominio, possiamo concludere che:

- $x_M = 1$ è un punto di massimo assoluto.
- $x_m = 5$ è un punto di minimo relativo.

Non esiste nessun punto di minimo assoluto, in quanto $\inf(f) = -\infty$.

4. *Calcolare la derivata seconda di f e determinarne il segno.*

   Calcoliamo:

   $f''(x) = -e^{-x}(x^2 - 6x + 5) + e^{-x}(2x - 6)$

   Pertanto:

$$\boxed{f''(x) = e^{-x}(-x^2 + 8x - 11)}$$

   Troviamone gli zeri e il segno:

$$\begin{array}{llllll} f'(x) = 0 & \iff & x^2 - 8x + 11 = 0 & \iff & (x = 4 - \sqrt{5}) \vee (x = 4 + \sqrt{5}) \\ f'(x) > 0 & \iff & x^2 - 8x + 11 < 0 & \iff & 4 - \sqrt{5} < x < 4 + \sqrt{5} \\ f'(x) < 0 & \iff & x^2 - 8x + 11 > 0 & \iff & (x < 4 - \sqrt{5}) \vee (x > 4 + \sqrt{5}) \end{array}$$

5. *Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso di f.*

   Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che:

   - $f(x)$ è convessa in $]\,4 - \sqrt{5}\ ,\ 4 + \sqrt{5}\,[$
   - $f(x)$ è concava in $]-\infty\,,\, 4 - \sqrt{5}\,[$ e in $]\,4 + \sqrt{5}\ ,\ +\infty\,[$
   - i punti $x = 4 \pm \sqrt{5}$ sono punti di flesso.

6. *Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$.*

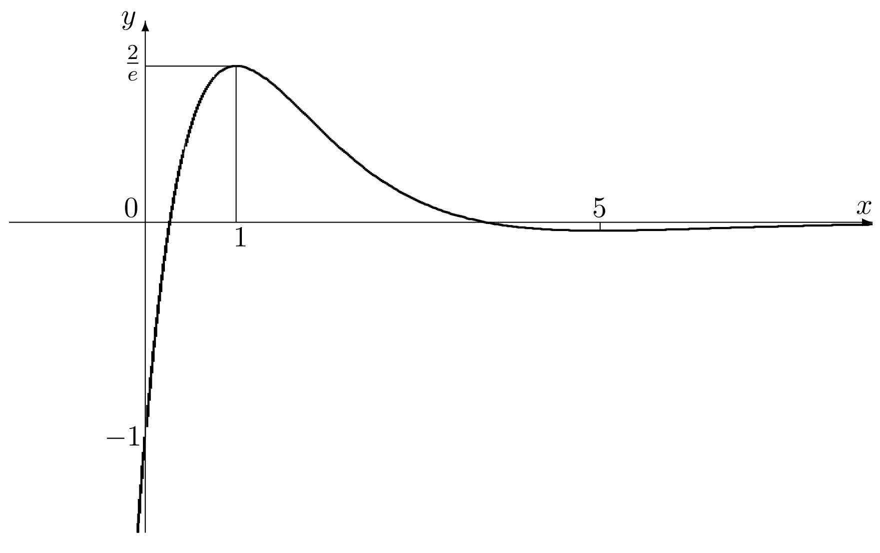

Figure 1: Grafico di $f(x) = (-x^2 + 4x - 1)e^{-x}$

7. *Indicare l'insieme immagine della funzione f.*

   Poiché il valore $M = \dfrac{2}{e}$ è il massimo assoluto di f e $\inf(f) = -\infty$, l'insieme immagine sarà:

$$\boxed{\mathrm{Im}\ f = \left]-\infty\ ,\ \frac{2}{e}\right]}$$

8. *Si consideri la funzione $g(x) = f(|x|)$ e se ne disegni un grafico qualitativo.*

La funzione $g(x) = f(|x|)$ coincide con $f(x)$, se $x \geq 0$, e con $f(-x)$, se $x < 0$. Pertanto il grafico di $g(x)$ coincide con il grafico di $f(x)$, per $x \geq 0$ mentre diventa il suo simmetrico rispetto all'asse delle y per $x < 0$.

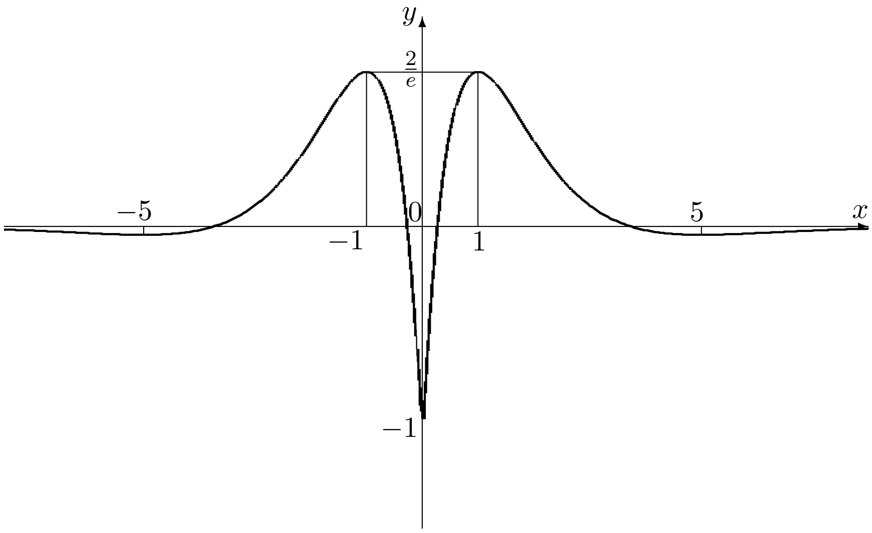

Figure 2: Grafico di $g(x) = f(|x|) = (-x^2 + 4|x| - 1)e^{-|x|}$

9. *La funzione $g(x)$ risulta derivabile?*

La funzione $g(x)$ non è derivabile in $x = 0$. Infatti:

$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = f'(0) = 5$ mentre $\lim_{x \to 0^-} g'(x) = -f'(0) = -5$.

Pertanto $g(x)$ ha un punto angoloso in $x = 0$.

10. *Si può applicare il teorema di Rolle alla funzione $g(x)$ sull'intervallo* $[-1, 1]$ *?*

Il teorema di Rolle non si può applicare alla funzione $g(x)$ sull'intervallo $[-1, 1]$, perché $g(x)$ non è derivabile nei punti interni a tale intervallo.

11. ♣ *Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione $g(x)$ del massimo ordine possibile.*

Poiché $g(x)$ non è derivabile (neppure una volta) in $x = 0$, lo sviluppo di McLaurin della funzione $g(x)$ del massimo ordine possibile risulta essere quello di ordine 0, cioè:

$g(x) = g(0) + o(x^0) = -1 + o(1)$

ESERCIZIO 3. *E' data la funzione :*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 5x + 6} + \sqrt[3]{x} \log x$$

1. *Calcolare l' integrale indefinito* $\int f(x) \, \mathrm{d}x$.

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x \; = \int \left(\frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 5x + 6} + \sqrt[3]{x} \log x \right) \, \mathrm{d}x \; = \int \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 5x + 6} \, \mathrm{d}x \; + \int x^{\frac{1}{3}} \log x \, \mathrm{d}x$$

Risolviamo il primo integrale con la tecnica di integrazione delle funzioni razionali; eseguiamo prima la divisione e poi la decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{4}{x - 3} - \frac{3}{x - 2}$$

Pertanto:

$$\int \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 5x + 6} \, \mathrm{d}x \; = \int \left(1 + \frac{4}{x - 3} - \frac{3}{x - 2} \right) \, \mathrm{d}x \; = x + 4 \log|x - 3| - 3 \log|x - 2| + k$$

Eseguiamo il secondo integrale per parti, assumendo $x^{\frac{1}{3}}$ come fattore differenziale:

$$\int x^{\frac{1}{3}} \log x \, \mathrm{d}x \; = \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} \log x - \int \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \; = \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} \log x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x \; = \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} \log x - \frac{9}{16} \, x^{\frac{4}{3}} + h$$

Pertanto l'integrale richiesto è:

$$\boxed{\int f(x) \, \mathrm{d}x \; = x + 4 \log|x - 3| - 3 \log|x - 2| + \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} \log x - \frac{9}{16} \, x^{\frac{4}{3}} + c}$$

2. *Tra tutte le primitive della funzione* $f(x)$*, trovare quella che passa per il punto* $P_0 = \left(1 \; , \; \frac{7}{16}\right)$.

Se indichiamo con

$$F(x) = x + 4 \log|x - 3| - 3 \log|x - 2| + \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} \log x - \frac{9}{16} \, x^{\frac{4}{3}} + c$$

la primitiva che stiamo cercando, dobbiamo avere $F(1) = \frac{7}{16}$. Pertanto:

$$1 + 4 \log|1 - 3| - 3 \log|1 - 2| + \frac{3}{4} 1 \log 1 - \frac{9}{16} \; 1 + c = \frac{7}{16}$$

da cui ricaviamo $\quad c = -4 \log 2$.

La primitiva richiesta è dunque la funzione:

$$\boxed{F(x) = x + 4 \log|x - 3| - 3 \log|x - 2| + \frac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} \log x - \frac{9}{16} \, x^{\frac{4}{3}} - 4 \log 2}$$

ESERCIZIO 4.

1. *Esiste una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e tale che* $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$ *?*

   Per il teorema di Weierstrass, se una funzione è continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, assume massimo M e minimo m. Pertanto $\mathrm{Im} f$ = [m,M] è un intervallo chiuso e limitato. Dunque non può esistere nessuna funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2. *Esiste una funzione* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *continua e tale che* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ *?*

   Sì, ad esempio la restrizione della funzione $f(x) = \tan x$ all'intervallo $\left] -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right[$ è una funzione continua che ha come dominio $\left] -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right[$ e come immagine $\mathbb{R}$.

3. ♣ *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile tale che* $f'(x) \geq 1$ *e* $f(0) = 0$. *Provare che* $f(x) \geq x$ *per ogni* $x \geq 0$ *e* $f(x) \leq x$ *per ogni* $x \leq 0$

   Consideriamo $x > 0$ e applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[0, x]$: esisterà un $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < x$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$; poiché $f'(x) \geq 1$, si ha $\dfrac{f(x)}{x} \geq 1$, da cui (dato che $x > 0$) $f(x) \geq x$.

   Se ora ripetiamo lo stesso ragionamento scegliendo $x < 0$ e lavorando sull'intervallo $[x, 0]$, otteniamo $\dfrac{f(0) - f(x)}{0 - x} \geq 1$, da cui, essendo $x < 0$, $f(x) \leq x$.