CORREZIONE del Compito di Esame di ANALISI MATEMATICA I del 17 Novembre 2001

$\boxed{\text{C}}$

ESERCIZIO 1.

Date le funzioni $f_1(x) = \mathrm{e}^{-8x^2} - \cos(4x)$ *e* $f_2(x) = \log(\cosh x)$ *si chiede di:*

1. *Determinare gli sviluppi di McLaurin di* $f_1(x)$ *e di* $f_2(x)$ *per* $x \to 0$ *arrestati al quarto ordine.*

   Dallo sviluppo di $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, con la sostituzione $t = -8x^2$ ricaviamo:

   $$e^{-8x^2} = 1 - 8x^2 + \frac{(-8x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - 8x^2 + 32x^4 + o(x^4).$$

   Dallo sviluppo di $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + o(t^4)$, con la sostituzione $t = 4x$ ricaviamo:

   $$\cos(4x) = 1 - \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4).$$

   Pertanto

   $$f_1(x) = 1 - 8x^2 + 32x^4 - \left(1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4\right) + o(x^4) = \frac{64}{3}x^4 + o(x^4).$$

   Dagli sviluppi di $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ e di $\log(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$,
   con la sostituzione $t = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ ricaviamo:

   $$f_2(x) = \log(\cosh x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) =$$

   $$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

2. *Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di* $f_1(x)$ *e di* $f_2(x)$ *per* $x \to 0$.

   Per quanto visto in 1), l'ordine di l'ordine di infinitesimo di $f_1(x)$ per $x \to 0$ è 4 e la sua parte principale è la funzione $p_1(x) = \frac{64}{3}x^4$, mentre l'ordine di l'ordine di infinitesimo di $f_2(x)$ per $x \to 0$ è 2 e la sua parte principale è la funzione $p_2(x) = \frac{x^2}{2}$.

3. *Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di* $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *per* $x \to 0$.

   Per quanto visto in 2), si ha:

   $$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\frac{64}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \sim \frac{128}{3}x^2 \text{ , per } x \to 0.$$

   Pertanto l'ordine di infinitesimo di $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ è 2 e la sua parte principale è la funzione $p(x) = \frac{128}{3}x^2$.

4. *Discutere la convergenza dell'integrale improprio*

   $$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3\sqrt{x}}dx \; .$$

   Poiché , per $x \to 0$

   $$\frac{f(x)}{x^3\sqrt{x}} \sim \frac{\frac{128}{3}x^2}{x^3\sqrt{x}} \asymp \frac{1}{x^{3/2}}$$

   e poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ diverge, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3\sqrt{x}}dx$ risulta divergente.

ESERCIZIO 2.

Calcolare

$$\int_1^4 \left(\frac{x+5}{5x-x^2} + \log(x+3) \right) dx$$

Scomponiamo l'integrale nella somma dei due integrali

$$I_1 = \int_1^4 \frac{x+5}{5x-x^2}\, dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_1^4 \log(x+3)\, dx.$$

Per ricavare I_1, scomponiamo la frazione integranda in fratti semplici e poi integriamo i due fratti elementari:

$$\frac{x+5}{5x-x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{5-x} \qquad \Longrightarrow I_1 = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{5-x} \right) dx = [\log|x| - 2\log|5-x|\,]_1^4 = 3\log 4.$$

Risolviamo I_2 con i metodi di integrazione per sostituzione (effettuiamo la sostituzione $x+3=t$) e poi per parti

$$I_2 = \int_4^7 \log t\, dt = [t\log t - t\,]_4^7 = 7\log 7 - 4\log 4 - 3.$$

Pertanto

$$\int_1^4 \left(\frac{x+5}{5x-x^2} + \log(x+3) \right) dx = I_1 + I_2 = 7\log 7 - \log 4 - 3.$$

ESERCIZIO 3.

Si consideri la funzione

$$f(x) = x\sqrt[3]{\log^2|4x|}.$$

1. *Determinare il dominio D di f e studiare le eventuali proprietà di simmetria di f.*

   $$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |4x| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |4x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

   Per vedere se f ha proprietà di simmetria, calcoliamo $f(-x)$:

   $$f(-x) = -x\sqrt[3]{\log^2|4(-x)|} = -x\sqrt[3]{\log^2|4x|} = -f(x)$$

   e dunque f è dispari; quindi il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine.

2. *Calcolare i limiti di f agli estremi del dominio D e trovare eventuali asintoti.*

   Per le proprietà di simmetria di f, limitiamo lo studio solo a $f/_{\mathbb{R}_+}$.

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(\log 4x)^{\frac{2}{3}} = 0\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   (si ricordi che $\lim_{x\to 0^+} x^k(\log x)^h = 0\ , \forall h, k > 0$).

   Pertanto

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

   Dunque non esistono asintoti orizzontali né verticali.

   Cerchiamo se esistono asintoti obliqui:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\log 4x)^{\frac{2}{3}} = +\infty$$

   e dunque non esistono asintoti obliqui.

3. *Calcolare la derivata prima di f e determinarne il segno.*

   Ci limitiamo sempre a $f/\mathbb{R}_+$. Derivando $f(x) = x(\log 4x)^{\frac{2}{3}}$, si ricava

$$f'(x) = (\log 4x)^{\frac{2}{3}} + x \cdot \frac{2}{3}(\log 4x)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{4x} \cdot 4 = (\log 4x)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(\log 4x)^{-\frac{1}{3}} = (\log 4x)^{-\frac{1}{3}} \left(\log 4x + \frac{2}{3}\right) = \frac{\log 4x + \frac{2}{3}}{\sqrt[3]{\log 4x}}.$$

   Pertanto

   $f'(x) = 0 \iff \log 4x = -\frac{2}{3} \iff x = \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}}$

   $f'(x) > 0 \iff (\log 4x)^{-\frac{1}{3}} \left(\log 4x + \frac{2}{3}\right) > 0 \iff (\log 4x)\left(\log 4x + \frac{2}{3}\right) > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}} \ \vee \ x > \frac{1}{4}.$

   $f'(x) < 0 \iff (\log 4x)\left(\log 4x + \frac{2}{3}\right) < 0 \iff \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}} < x < \frac{1}{4}.$

4. *Determinare gli intervalli di monotonia e gli estremi di f.*

   f è monotona crescente negli intervalli $\left(0, \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}}\right)$ e $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$;

   f è monotona decrescente nell' intervallo $\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}}, \frac{1}{4}\right)$.

   Inoltre date le proprietà di simmetria di f, possiamo asserire che

   f è monotona crescente negli intervalli $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ e $\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}}, 0\right)$;

   f è monotona decrescente nell' intervallo $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

   Il punto $x_1 = \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}}$ è un punto di massimo relativo, mentre il punto $x_2 = \frac{1}{4}$ è un punto di minimo relativo (si ricordi che $\sup(f) = +\infty$ e che $\inf(f) = -\infty$).

   Analogamente, il punto $x_3 = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}}$ è un punto di minimo relativo, mentre il punto $x_4 = -\frac{1}{4}$ è un punto di massimo relativo.

5. *Detto $\tilde{f}(x)$ il prolungamento continuo di $f(x)$ a tutto $\mathbf{R}$, determinare eventuali punti di non derivabilità di $\tilde{f}(x)$.*

   Si ha

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x(\log|4x|)^{\frac{2}{3}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   $\mathrm{Dom}(\tilde{f}'(x)) = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\}$. Infatti:

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{x(\log|4x|)^{\frac{2}{3}}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\frac{1}{4}} f'(x) = \lim_{x \to \pm\frac{1}{4}} \frac{\log|4x| + \frac{2}{3}}{\sqrt[3]{\log|4x|}} = \infty.$$

   Pertanto i punti $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$ e $x = -\frac{1}{4}$ sono punti di non derivabilità.

   Il punto $x = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale.

   Tenendo conto degli intervalli di monotonia possiamo affermare che i punti $x = \pm\frac{1}{4}$ sono punti di cuspide .

6. *Tracciare un grafico qualitativo di f che tenga conto di tutte le informazioni raccolte nei punti precedenti dell'esercizio.*

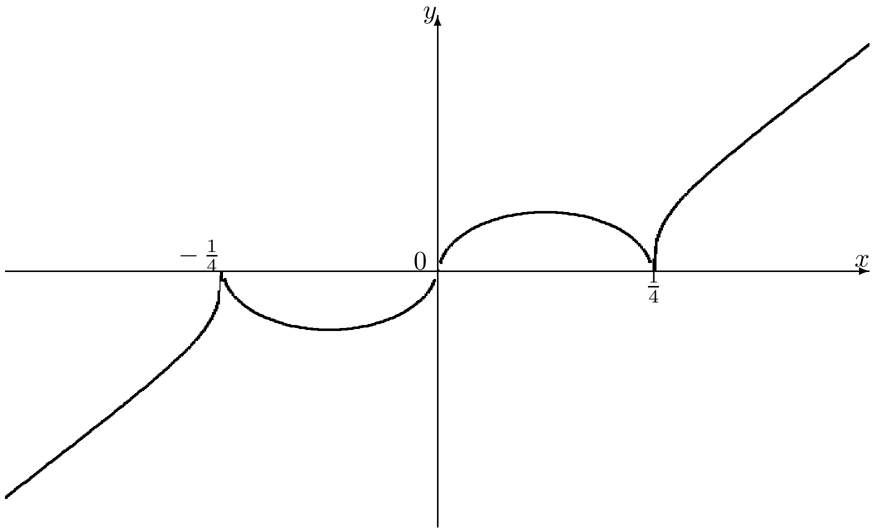

Figure 1: Grafico di $f(x) = x\sqrt[3]{\log^2 |4x|}$

ESERCIZIO 4.

a) Dimostrare che la funzione $x \mapsto \int_1^x e^{t^2} dt$ è crescente su $\mathbf{R}$.

Posto $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\, dt$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = e^{x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Essendo $F(x)$ continua su $\mathbb{R}$, si può concludere che F è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

b) Siano f, g e h delle funzioni definite in un intorno del punto x_0 (escluso eventualmente il punto stesso); siano inoltre g e h diverse da zero in tale intorno. Dimostrare che se $f \sim g$ e $g = o(h)$ per $x \to x_0$ allora $f = o(h)$ per $x \to x_0$.

Per ipotesi,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Dunque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Pertanto, per $x \to x_0$, si ha $f(x) = o(h(x))$.