COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 16 Novembre 2002

A

ESERCIZIO 1. Si considerino le funzioni $f_1(x) = \ln(1 + 2x^2)$ e $f_2(x) = x \sin(e^{2x} - 1)$.

(a) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine con resto in forma di Peano di $f_1(x)$; stabilire l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f_1(x)$ per $x \to 0$;

(b) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine con resto in forma di Peano di $f_2(x)$; stabilire l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f_2(x)$ per $x \to 0$;

(c) utilizzando i risultati precedenti, trovare la parte principale di $f_1(x)f_2(x)$ e di $f_1(x) - f_2(x)$ per $x \to 0$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \arctan \frac{2x+1}{2x-5}$ si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi di tale dominio ed eventuali asintoti;

(b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$; trovare gli eventuali punti stazionari e classificarli;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$

(d) tracciare il grafico di $g(x) = |f(x)|$

(e) dimostrare che la funzione $g(x)$ ammette un prolungamento continuo a tutto $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO 3. Calcolare $\int x\sqrt{3x+5}\,dx$.

ESERCIZIO 4.

(a) Provare che la funzione $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ ha uno e un solo zero reale.

(b) E' data una funzione $f(x)$, definita in un intorno del punto $x_0 = -3$, tale che $\lim_{x \to -3} f(x) = -\infty$. Scrivere esplicitamente la definizione di questo fatto.

(c) Stabilire se la funzione $f(x) = 2x|x|$ è derivabile (oppure non lo è) in $x = 0$, giustificando la risposta.

TEORIA

(a) Formulare e dimostrare il Teorema della media integrale per una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0,2]$.

(b) Stabilire se è verificata la tesi del Teorema della media integrale applicato all'intervallo $[0,2]$ e alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{per } 1 < x \le 2 \end{cases} .$$

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 16 Novembre 2002

B

ESERCIZIO 1. Si considerino le funzioni $f_1(x) = \tan(2x^2)$ e $f_2(x) = x \ln(1 + \sin 2x)$.

(a) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine con resto in forma di Peano di $f_1(x)$; stabilire l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f_1(x)$ per $x \to 0$;

(b) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine con resto in forma di Peano di $f_2(x)$; stabilire l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f_2(x)$ per $x \to 0$;

(c) utilizzando i risultati precedenti, trovare la parte principale di $f_1(x)f_2(x)$ e di $f_1(x) - f_2(x)$ per $x \to 0$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \arctan \frac{3x-1}{3x+7}$ si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi di tale dominio ed eventuali asintoti;

(b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$; trovare gli eventuali punti stazionari e classificarli;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$

(d) tracciare il grafico di $g(x) = |f(x)|$

(e) dimostrare che la funzione $g(x)$ ammette un prolungamento continuo a tutto $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO 3. Calcolare $\displaystyle\int x\sqrt{2x-7}\,dx$.

ESERCIZIO 4.

(a) Provare che la funzione $f(x) = -5x^3 + x^2 - 2x + 7$ ha uno e un solo zero reale.

(b) E' data una funzione $f(x)$, definita in un intorno del punto $x_0 = -5$, tale che $\lim_{x\to -5} f(x) = -\infty$. Scrivere esplicitamente la definizione di questo fatto.

(c) Stabilire se la funzione $f(x) = 3x^2|x|$ è derivabile (oppure non lo è) in $x = 0$, giustificando la risposta.

TEORIA

(a) Formulare e dimostrare il Teorema della media integrale per una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[1, 5]$.

(b) Stabilire se è verificata la tesi del Teorema della media integrale applicato all'intervallo $[1, 5]$ e alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{per } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{per } 3 < x \leq 5 \ . \end{cases}$$