Cognome .... Nome .... COMPITO A

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 16 Novembre 2001

ESERCIZIO 1. Date le funzioni $f_1(x) = \log(1 + \sin(3x))$ e $f_2(x) = \sin(2x) - 2x$:

1. Determinare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin di $f_1(x)$ e $f_2(x)$

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ per $x \to 0$

3. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio : $\displaystyle\int_0^1 \frac{f_1(x) - f_2(x)}{x^2}\,dx$

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x+1}$

1. Determinare il dominio di $f(x)$

2. Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno della funzione $f(x)$

5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$

6. Tracciare il grafico di $f(x)$

7. Determinare eventuali estremi locali e assoluti di $f(x)$

ESERCIZIO 3. Determinare tutte le primitive della funzione :

$$f(x) = x \log(x+1) + \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$$

ESERCIZIO 4.

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni strettamente positive tali che $f(x) = o(x)$ e $g(x) \asymp x$, per $x \to +\infty$, allora $f(x) = o(g(x))$ per $x \to +\infty$.

   VERO **FALSO**

2. Sia $f(x)$ una funzione assolutamente integrabile su $[0, +\infty)$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\, dx$ risulta essere convergente.

   VERO **FALSO**

3. **(FACOLTATIVO)** Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili su $\mathbb{R}$ tali che $f(0) = g(0)$ e $f'(x) \geq g'(x)$, allora $f(x) \geq g(x)$ per $x \geq 0$ e $f(x) \leq g(x)$ per $x \leq 0$.

   VERO **FALSO**

TEORIA.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua su $\mathbb{R}$

1. Fornire la definizione di primitiva di $f(x)$

2. Fornire la definizione di funzione integrale di $f(x)$

3. Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale e i suoi corollari

4. Dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale

Cognome .... Nome .... COMPITO B

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 16 Novembre 2001

ESERCIZIO 1. Date le funzioni $f_1(x) = \log(1 + \sin(2x))$ e $f_2(x) = \cos(3x) - 1$:

1. Determinare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin di $f_1(x)$ e $f_2(x)$

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ per $x \to 0$

3. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio : $\displaystyle\int_0^1 \frac{f_1(x) - f_2(x)}{x^2}\, dx$

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x-1}$

1. Determinare il dominio di $f(x)$

2. Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno della funzione $f(x)$

5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$

6. Tracciare il grafico di $f(x)$

7. Determinare eventuali estremi locali e assoluti di $f(x)$

ESERCIZIO 3. Determinare tutte le primitive della funzione :

$$f(x) = (x+1)\log x + \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}$$

ESERCIZIO 4.

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni strettamente positive tali che $f(x) \asymp g(x)$ e $g(x) = o(x)$, per $x \to +\infty$, allora $f(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$.

   VERO **FALSO**

2. Sia $f(x)$ una funzione assolutamente integrabile su $[0, +\infty)$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \cos x \, dx$ risulta essere convergente.

   VERO **FALSO**

3. **(FACOLTATIVO)** Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite su $\mathbb{R}$ tali che $f(0) = g(0)$ e $f'(x) \geq g'(x)$, allora $f(x) \geq g(x)$ per $x \geq 0$ e $f(x) \leq g(x)$ per $x \leq 0$.

   VERO **FALSO**

TEORIA.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua su $\mathbb{R}$

1. Fornire la definizione di primitiva di $f(x)$

2. Fornire la definizione di funzione integrale di $f(x)$

3. Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale e i suoi corollari

4. Dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale