COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 16 Febbraio 2002

A

ESERCIZIO 1. Data la funzione $f(x) = \cos(2x) - \sqrt{1 - 4x^2}$

1. Calcolare lo sviluppo di MacLaurin di $f(x)$ al quarto ordine.

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$.

3. Calcolare $f^{(IV)}(0)$ e studiare la natura del punto critico $x = 0$ (massimo, minimo o flesso).

ESERCIZIO 2. Data la funzione:

$$f(x) = x - 3\arctan x - \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$$

1. Determinare il dominio e calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

2. Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi (massimi e minimi relativi e assoluti) di f.

3. Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso di f.

4. Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$.

5. Quanti sono gli zeri della funzione f? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO 3.

1. Calcolare le primitive della funzione $f_1(x) = x^3\, e^{x^4}$.

2. Calcolare le primitive della funzione $f_2(x) = x \cos x$.

3. Calcolare la primitiva $F(x)$ che si annulla in $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3\, e^{x^4} & \text{se } x < 0 \\ x \cos x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4. Data la funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin t \, dt$

1. Dimostrare, senza calcolare l'integrale, che $F(x) > 0$ per ogni $x \in (0, \pi)$.

2. Dire se esiste finito il $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin t \, dt$. Motivare la risposta.

3. Dimostrare, senza calcolare l'integrale, che F è pari, cioè $F(-x) = F(x)$.

TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

2. Dare un esempio di una funzione per cui almeno una delle ipotesi del teorema non è verificata e per cui la tesi non vale.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 16 Febbraio 2002

B

ESERCIZIO 1. Data la funzione $f(x) = \sqrt{1+4x^2} - \cosh(2x)$

1. Calcolare lo sviluppo di MacLaurin di $f(x)$ al quarto ordine.

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$.

3. Calcolare $f^{(IV)}(0)$ e studiare la natura del punto critico $x = 0$ (massimo, minimo o flesso).

ESERCIZIO 2. Data la funzione:

$$f(x) = 3\arctan x - x - \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$$

1. Determinare il dominio e calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

2. Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi (massimi e minimi relativi e assoluti) di f.

3. Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso di f.

4. Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$.

5. Quanti sono gli zeri della funzione f? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO 3.

1. Calcolare le primitive della funzione $f_1(x) = x^4 e^{x^5}$.

2. Calcolare le primitive della funzione $f_2(x) = x \sin x$.

3. Calcolare la primitiva $F(x)$ che si annulla in $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{x^5} & \text{se } x < 0 \\ x \sin x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4. Data la funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos t \, dt$

1. Dimostrare, senza calcolare l'integrale, che $F(x) > 0$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

2. Dire se esiste finito il $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos t \, dt$. Motivare la risposta.

3. Dimostrare, senza calcolare l'integrale, che F è dispari, cioè $F(-x) = -F(x)$.

TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

2. Dare un esempio di una funzione per cui almeno una delle ipotesi del teorema non è verificata e per cui la tesi non vale.