Cognome .... Nome .... COMPITO A

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 14 Novembre 2002

ESERCIZIO 1. Data la funzione $f(x) = \sin^2(2x)$

1. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$

2. Determinare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 5 della funzione $f(x)$

Posto $g(x) = f(\sqrt[3]{x}) = \sin^2(2\sqrt[3]{x})$

3. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \to 0$

4. Determinare lo sviluppo di MacLaurin di $g(x)$ del massimo ordine possibile

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln|x| - 1}{x}$

1. Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di $f(x)$

2. Calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno e gli eventuali zeri della funzione $f(x)$

5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$

6. Tracciare il grafico di $f(x)$

7. Sia $g(x) = e^{f(x)}$. Dimostrare che le funzioni $g(x)$ e $f(x)$ hanno gli stessi intervalli di monotonia

8. Tracciare il grafico della funzione $g(x)$

ESERCIZIO 3. Data la funzione $\quad f(x) = \dfrac{1}{2 - e^{3x}}$

1. Determinare tutte le primitive di $f(x)$

2. Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

3. Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

4. Nel caso siano convergenti, calcolare gli integrali impropri dei punti 2 e 3

ESERCIZIO 4.

1. Esistono due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f(x) = o(x^2)$, $g(x) = o(x)$ e $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$.

   VERO **FALSO**

2. Esiste una funzione $f(x)$ tale che $f(x) \sim x$ e $f(x) - x \asymp x$ per $x \to +\infty$.

   VERO **FALSO**

3. **FACOLTATIVO**

   Sia $f(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$, tale che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora $f(x)$ è derivabile in $x = 0$.

   VERO **FALSO**

TEORIA.

1. Cosa significa, per definizione di limite, che $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

2. Enunciare il Teorema del confronto per due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $g(x) \le f(x)$ in un intorno I del punto 1 e $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

3. Dimostrare il teorema enunciato al punto 2

Cognome .... Nome .... COMPITO B

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 14 Novembre 2002

ESERCIZIO 1. Data la funzione $f(x) = (\cos(2x) - 1)^2$

1. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$

2. Determinare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 7 della funzione $f(x)$

Posto $g(x) = f(\sqrt[5]{x}) = (\cos(2\sqrt[5]{x}) - 1)^2$

3. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \to 0$

4. Determinare lo sviluppo di MacLaurin di $g(x)$ del massimo ordine possibile

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1 - \ln|x|}{x}$

1. Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di $f(x)$

2. Calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno e gli eventuali zeri della funzione $f(x)$

5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$

6. Tracciare il grafico di $f(x)$

7. Sia $g(x) = e^{g(x)}$. Dimostrare che le funzioni $g(x)$ e $f(x)$ hanno gli stessi intervalli di monotonia

8. Tracciare il grafico della funzione $g(x)$

ESERCIZIO 3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{3 - e^{2x}}$

1. Determinare tutte le primitive di $f(x)$

2. Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

3. Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

4. Nel caso siano convergenti, calcolare gli integrali impropri dei punti 2 e 3

ESERCIZIO 4.

1. Esistono due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f(x) = o(x)$, $g(x) = o(x^2)$ e $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$.

   VERO **FALSO**

2. Esiste una funzione $f(x)$ tale che $f(x) \sim x^2$ e $f(x) - x^2 \asymp x^2$ per $x \to +\infty$.

   VERO **FALSO**

3. **FACOLTATIVO**

   Sia $f(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$, tale che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora $f(x)$ è derivabile in $x = 0$.

   VERO **FALSO**

TEORIA.

1. Cosa significa, per definizione di limite, che $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

2. Enunciare il Teorema del confronto per due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f(x) \leq g(x)$ in un intorno I del punto -1 e $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

3. Dimostrare il teorema enunciato al punto 2