COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 13 Novembre 2004
Sede di Torino

A

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \sin(2x\cos x) - 2x$.

(a) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinitesimo x;

(b) Determinare, per $x \to +\infty$, l'ordine di infinito e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinito x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = e^{\frac{3x-5}{x^2-1}}$, si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi di tale dominio ed eventuali asintoti;

(b) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di f;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$, tenendo conto di tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti;

(d) determinare l'insieme $\operatorname{im} f$;

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int_{e^4}^{e^6} \frac{1+\ln x}{x(\ln^2 x - 4)}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $f(3) = 1$. Si determini il dominio della funzione $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$.

(b) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f = o(g)$ per $x \to 0$. E' vero che allora, necessariamente, $g = o(f)$ per $x \to +\infty$? (Si giustifichi adeguatamente la risposta data)

(c) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ -x + 2 & \text{per } 3 \leq x \leq 5 \end{cases},$$

calcolare la media integrale di $f(x)$ su $[1, 5]$.

TEORIA (Punti 6)

(a) Si enunci il Teorema di Lagrange.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ -x^2 + bx + 1 & \text{per } 0 < x \le 3 \end{cases} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(b) si determinino i valori dei parametri a e b per i quali la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 3]$;

(c) per i valori di a e b ottenuti in (b), si determinino i punti di Lagrange di $f(x)$;

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 13 Novembre 2004
Sede di Torino

B

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \sinh(2x \cos x) - 2x$.

(a) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinitesimo x;

(b) Determinare, per $x \to +\infty$, l'ordine di infinito e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinito x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = e^{\frac{-3x+5}{x^2-1}}$, si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi di tale dominio ed eventuali asintoti;

(b) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di f;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$, tenendo conto di tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti;

(d) determinare l'insieme $\operatorname{im} f$;

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int_{e^6}^{e^9} \frac{1+\ln x}{x(\ln^2 x - 9)}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $f(5) = 1$. Si determini il dominio della funzione $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$.

(b) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f = o(g)$ per $x \to 0$. E' vero che allora, necessariamente, $g = o(f)$ per $x \to +\infty$? (Si giustifichi adeguatamente la risposta data)

(c) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ -1 & \text{per } 3 \leq x \leq 5 \end{cases},$$

calcolare la media integrale di $f(x)$ su $[1, 5]$.

TEORIA (Punti 6)

(a) Si enunci il Teorema di Lagrange.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - bx + 1 & \text{per } -3 \le x \le 0 \\ -2x - a & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(b) si determinino i valori dei parametri a e b per i quali la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-3, 1]$;

(c) per i valori di a e b ottenuti in (b), si determinino i punti di Lagrange di $f(x)$;

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 13 Novembre 2004
Sede di Torino

C

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \sin(x \cos 3x) - x$.

(a) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinitesimo x;

(b) Determinare, per $x \to +\infty$, l'ordine di infinito e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinito x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = e^{\frac{4x-5}{x^2-1}}$, si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi di tale dominio ed eventuali asintoti;

(b) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di f;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$, tenendo conto di tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti;

(d) determinare l'insieme $\operatorname{im} f$;

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int_{e^4}^{e^6} \frac{1-\ln x}{x(\ln^2 x - 4)}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $f(4) = 1$. Si determini il dominio della funzione $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$.

(b) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f = o(g)$ per $x \to 0$. E' vero che allora, necessariamente, $g = o(f)$ per $x \to +\infty$? (Si giustifichi adeguatamente la risposta data)

(c) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{per } 3 \leq x \leq 5 \end{cases},$$

calcolare la media integrale di $f(x)$ su $[1, 5]$.

TEORIA (Punti 6)

(a) Si enunci il Teorema di Lagrange.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ x^2 - bx - 1 & \text{per } 0 < x \le 3 \end{cases} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(b) si determinino i valori dei parametri a e b per i quali la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 3]$;

(c) per i valori di a e b ottenuti in (b), si determinino i punti di Lagrange di $f(x)$;

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 13 Novembre 2004
Sede di Torino

D

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \sinh(x\cos 3x) - x$.

(a) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinitesimo x;

(b) Determinare, per $x \to +\infty$, l'ordine di infinito e la parte principale di $f(x)$, rispetto all'infinito x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^3}\, \mathrm{d}x\,.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = e^{\frac{-4x+5}{x^2-1}}$, si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi di tale dominio ed eventuali asintoti;

(b) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di f;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$, tenendo conto di tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti;

(d) determinare l'insieme $\operatorname{im} f$;

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int_{e^6}^{e^9} \frac{1 - \ln x}{x(\ln^2 x - 9)}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $f(2) = 1$. Si determini il dominio della funzione $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$.

(b) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f = o(g)$ per $x \to 0$. E' vero che allora, necessariamente, $g = o(f)$ per $x \to +\infty$? (Si giustifichi adeguatamente la risposta data)

(c) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{per } 3 \leq x \leq 5 \end{cases},$$

calcolare la media integrale di $f(x)$ su $[1, 5]$.

TEORIA (Punti 6)

(a) Si enunci il Teorema di Lagrange.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{per } -3 \leq x \leq 0 \\ 2x + a & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(b) si determinino i valori dei parametri a e b per i quali la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-3, 1]$;

(c) per i valori di a e b ottenuti in (b), si determinino i punti di Lagrange di $f(x)$;