COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 13 Febbraio 2009

C

ESERCIZIO 1. (6 punti) Si consideri la funzione $f(x) = 1 + 2x^3 - \sqrt{1 + 4\sin^3 x}$.

(a) Verificare che, per $x \to 0$, si ha $f(x) = x^5 + o(x^5)$;

(b) dedurre che $x = 0$ è un punto di stazionarietà per $f(x)$ e indicarne la natura (punto di massimo o di minimo locale, punto di flesso);

(c) calcolare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3(1-\cos x)}$.

ESERCIZIO 2. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{5 - 2\ln x}{(\ln x - 3)^2}$. Si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, mostrando, in particolare, che è l'unione di due intervalli disgiunti; trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) trovare la derivata prima e studiare la derivabilità di $f(x)$;

(c) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$;

(e) SENZA FARE ULTERIORI CALCOLI, ma utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti, dire per quali valori di $k \in I\!R$ l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni distinte.

ESERCIZIO 3. (7 punti) E' data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{-4y - y^2}{x}$

(a) trovare gli eventuali integrali costanti;

(b) risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' &= \dfrac{-4y - y^2}{x} \\ y(1) &= -3 \end{cases}$

ESERCIZIO 4. (6 punti)

(a) La funzione $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^{120}} dt$ ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. **VERO** **FALSO**

(b) Il numero complesso $z = \frac{(1-i)e^{8\pi i} + (e^{i\pi/4})^{10}}{1+i}$ è reale. **VERO** **FALSO**

(c) Siano f, g due funzioni definite in un intorno del punto $x = 7$, infinitesime ed equivalenti per $x \to 7$. Vale allora la relazione $3f^2 + 5f = o(-8g^2 + 2g)$ per $x \to 7$. **VERO** **FALSO**

TEORIA (5 punti)

a) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue.

b) Sia $f(x) = x^5 + x^3 + 16$. Provare che esiste $x_0 \in [0, 2]$ tale che $f(x_0) = 35$.
Si chiede inoltre se tale x_0 è l'unico $x \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = 15$.