

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 13 Febbraio 2002**ESERCIZIO 1.** Date le funzioni $f_1(x) = \sqrt{1+4x} - 1$ e $f_2(x) = e^{2x} - 1$:

1. Determinare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin, la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f_1(x)$ e $f_2(x)$

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + 4x^2$ per $x \rightarrow 0$

3. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio : $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^5} dx$

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$

1. Determinare il dominio di $f(x)$

2. Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno della funzione $f(x)$

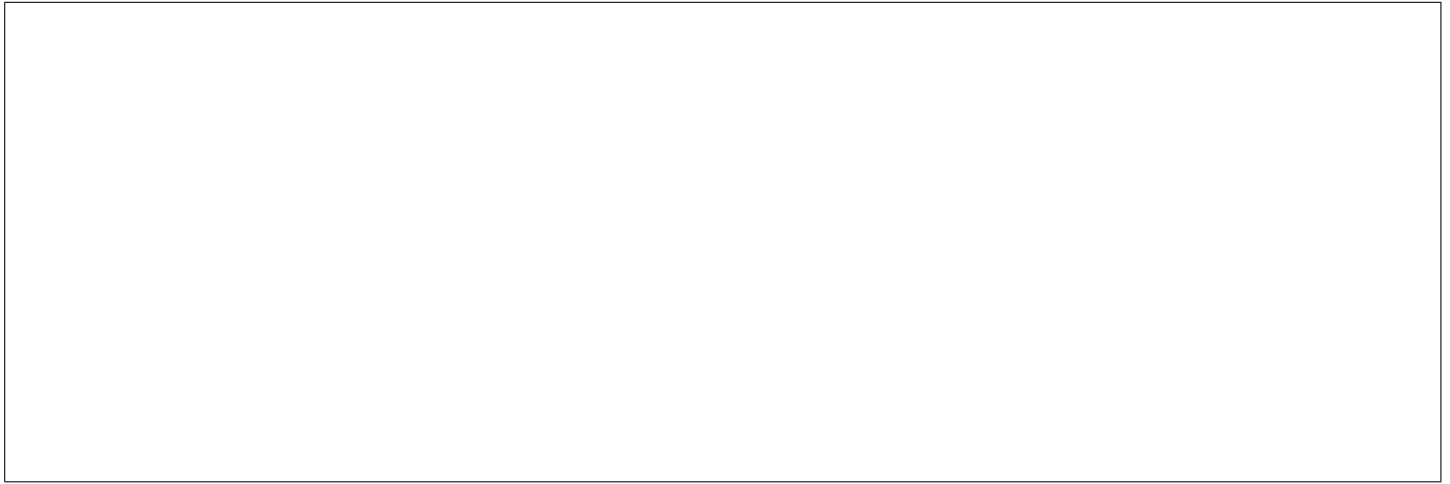
5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$

6. Tracciare il grafico di $f(x)$

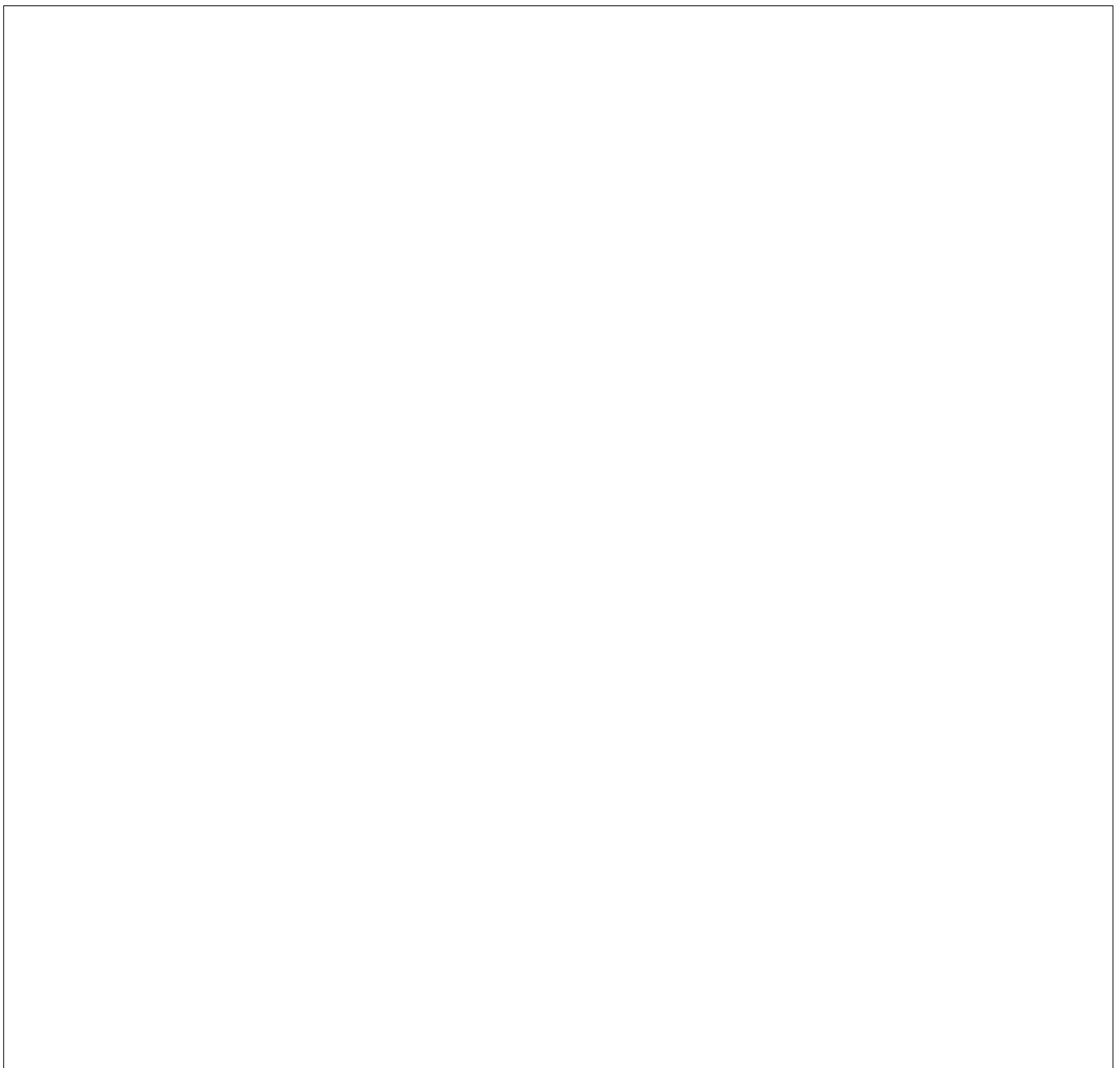
7. Determinare eventuali estremi locali e assoluti di $f(x)$

ESERCIZIO 3. Dato l'insieme $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, x \sin x \leq y \leq 4x - \frac{4x^2}{\pi}\}$

1. rappresentare graficamente l'insieme A



2. Calcolare l'area di A



ESERCIZIO 4.

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che $0 < f(x) \leq g(x)$ e $g(x) \sim x$ per $x \rightarrow +\infty$, allora $f(x) \sim x$ per $x \rightarrow +\infty$.

VERO

FALSO

2. Sia $f(x)$ una funzione continua su \mathbb{R} tale che $f(0) = f(2) = -1$ e $f(1) = 1$, allora

(a) Esiste $\bar{x} \in (-1, 1)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$

VERO

FALSO

(b) $x = 1$ è punto di massimo relativo

VERO

FALSO

TEORIA.

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$

1. Fornire la definizione di continuità di $f(x)$ nel punto x_0

2. Fornire la definizione di derivabilità di $f(x)$ nel punto x_0

3. Enunciare e illustrare con esempi grafici il teorema che lega i concetti di continuità e derivabilità

4. Dimostrare tale teorema

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 13 Febbraio 2002**ESERCIZIO 1.** Date le funzioni $f_1(x) = \sqrt{1+6x} - 1$ e $f_2(x) = e^{3x} - 1$:

1. Determinare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin, la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f_1(x)$ e $f_2(x)$

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + 9x^2$ per $x \rightarrow 0$

3. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio : $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^5} dx$

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

1. Determinare il dominio di $f(x)$

2. Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

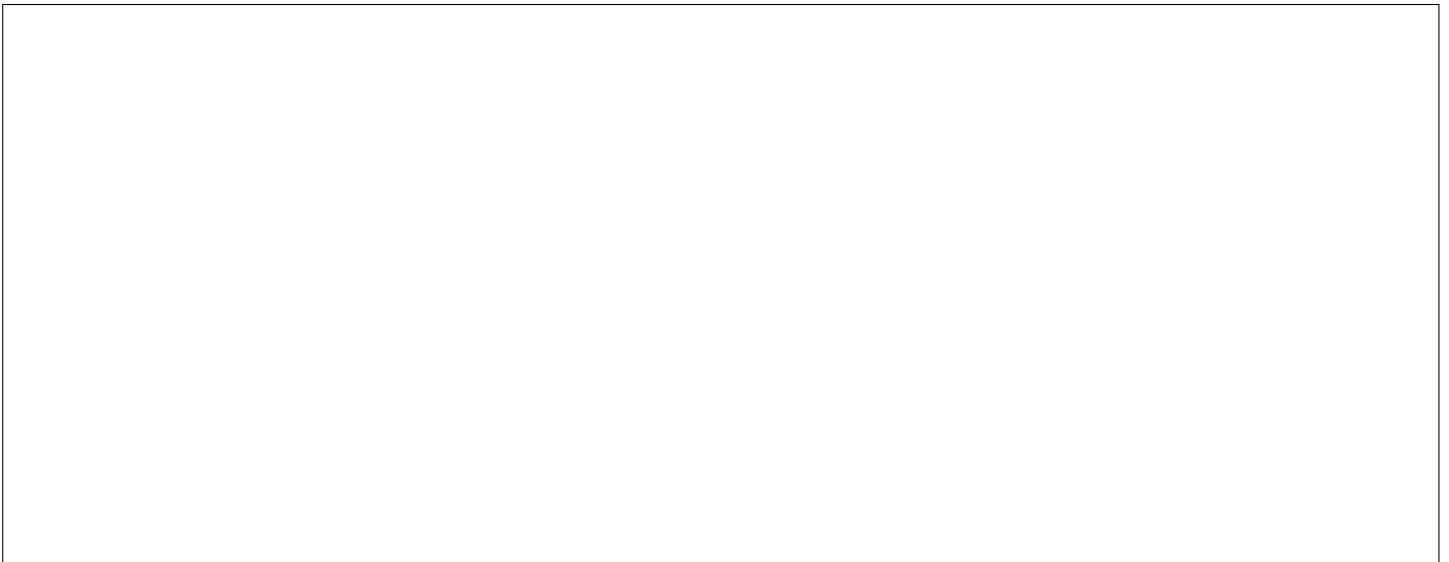
3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno della funzione $f(x)$

5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$



6. Tracciare il grafico di $f(x)$

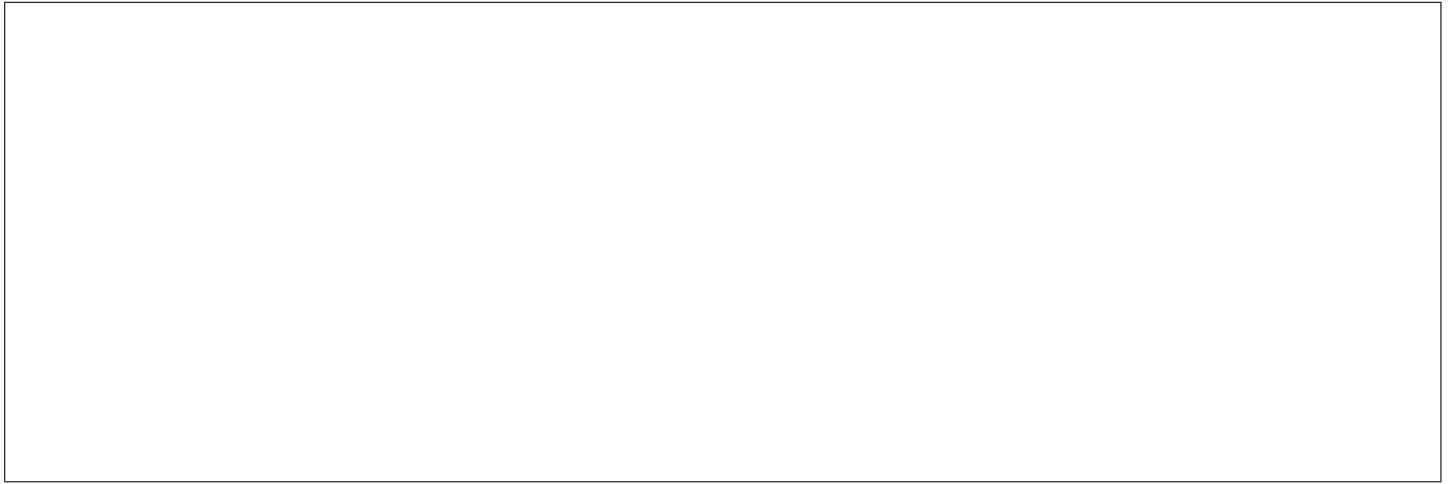


7. Determinare eventuali estremi locali e assoluti di $f(x)$



ESERCIZIO 3. Dato l'insieme $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x - \frac{2x^2}{\pi} \leq y \leq x \cos x\}$

1. rappresentare graficamente l'insieme A



2. Calcolare l'area di A



ESERCIZIO 4.

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che $0 < f(x) \leq g(x)$ e $g(x) \sim x$ per $x \rightarrow +\infty$, allora $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

VERO

FALSO

2. Sia $f(x)$ una funzione continua su \mathbb{R} tale che $f(0) = f(2) = 1$ e $f(1) = -1$, allora

(a) Esiste $\bar{x} \in (-1, 1)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$

VERO

FALSO

(b) $x = 1$ è punto di minimo relativo

VERO

FALSO

TEORIA.

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$

1. Fornire la definizione di continuità di $f(x)$ nel punto x_0

2. Fornire la definizione di derivabilità di $f(x)$ nel punto x_0

3. Enunciare e illustrare con esempi grafici il teorema che lega i concetti di continuità e derivabilità

4. Dimostrare tale teorema