Cognome .... Nome .... COMPITO A

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 13 Febbraio 2002

ESERCIZIO 1. Date le funzioni $f_1(x) = \sqrt{1+4x} - 1$ e $f_2(x) = e^{2x} - 1$:

1. Determinare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin, la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f_1(x)$ e $f_2(x)$

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + 4x^2$ per $x \to 0$

3. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^5} dx$

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$

1. Determinare il dominio di $f(x)$

2. Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno della funzione $f(x)$

5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$

6. Tracciare il grafico di $f(x)$

7. Determinare eventuali estremi locali e assoluti di $f(x)$

ESERCIZIO 3. Dato l'insieme $A = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi,\ x\sin x \le y \le 4x - \dfrac{4x^2}{\pi}\}$

1. rappresentare graficamente l'insieme A

2. Calcolare l'area di A

ESERCIZIO 4.

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che $0 < f(x) \leq g(x)$ e $g(x) \sim x$ per $x \to +\infty$, allora $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$.

   VERO **FALSO**

2. Sia $f(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$ tale che $f(0) = f(2) = -1$ e $f(1) = 1$, allora

   (a) Esiste $\overline{x} \in (-1, 1)$ tale che $f(\overline{x}) = 0$ **VERO** **FALSO**

   (b) $x = 1$ è punto di massimo relativo **VERO** **FALSO**

TEORIA.

Sia $f : (a, b) \to I\!R$ e sia $x_0 \in (a, b)$

1. Fornire la definizione di continuità di $f(x)$ nel punto x_0

2. Fornire la definizione di derivabilità di $f(x)$ nel punto x_0

3. Enunciare e illustrare con esempi grafici il teorema che lega i concetti di continuità e derivabilità

4. Dimostrare tale teorema

Cognome .... Nome .... COMPITO B

Esame di Analisi I (sede di Mondovì) - 13 Febbraio 2002

ESERCIZIO 1. Date le funzioni $f_1(x) = \sqrt{1+6x} - 1$ e $f_2(x) = e^{3x} - 1$:

1. Determinare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin, la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f_1(x)$ e $f_2(x)$

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + 9x^2$ per $x \to 0$

3. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^5}\,dx$

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

1. Determinare il dominio di $f(x)$

2. Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di $f(x)$

3. Determinare l'insieme dei punti di continuità e derivabilità della funzione $f(x)$

4. Determinare il segno della funzione $f(x)$

5. Determinare $f'(x)$ e studiare gli intervalli di monotonia di $f(x)$

6. Tracciare il grafico di $f(x)$

7. Determinare eventuali estremi locali e assoluti di $f(x)$

ESERCIZIO 3. Dato l'insieme $A = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ x - \frac{2x^2}{\pi} \le y \le x \cos x\}$

1. rappresentare graficamente l'insieme A

2. Calcolare l'area di A

ESERCIZIO 4.

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che $0 < f(x) \leq g(x)$ e $g(x) \sim x$ per $x \to +\infty$, allora $f(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$.

   VERO **FALSO**

2. Sia $f(x)$ una funzione continua su $\mathbb{R}$ tale che $f(0) = f(2) = 1$ e $f(1) = -1$, allora

   (a) Esiste $\overline{x} \in (-1, 1)$ tale che $f(\overline{x}) = 0$ **VERO** **FALSO**

   (b) $x = 1$ è punto di minimo relativo **VERO** **FALSO**

TEORIA.
Sia $f : (a, b) \to I\!R$ e sia $x_0 \in (a, b)$

1. Fornire la definizione di continuità di $f(x)$ nel punto x_0

2. Fornire la definizione di derivabilità di $f(x)$ nel punto x_0

3. Enunciare e illustrare con esempi grafici il teorema che lega i concetti di continuità e derivabilità

4. Dimostrare tale teorema