COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 12 Novembre 2005

A

ESERCIZIO 1. (6 punti) Si considerino le funzioni $f(x) = e^{2x^2} - 1$, $g(x) = x \log(1 + 2x + 3x^2)$.

(a) determinare gli sviluppi di Maclaurin arrestati al terzo ordine per $f(x)$ e $g(x)$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to 0$;

(c) determinare la parte principale delle funzioni $f(x) - g(x)$ e $f(x)g(x)$ per $x \to 0$.

ESERCIZIO 2. (11 punti) Data la funzione $f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{|x+3|}$ si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) determinare l'insieme dei punti di continuità e di derivabilità della funzione $f(x)$;

(c) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico di $f(x)$ utilzzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

(e) determinare l'immagine della funzione $f(x)$.

ESERCIZIO 3. (5 punti) Calcolare $\displaystyle\int \left(\frac{x}{\sqrt{16-4x^2}} + \ln^2(2x) \right) \mathrm{d}x.$

ESERCIZIO 4. (6 punti)

(a) Calcolare $\int_1^3 [x]\,\mathrm{d}x$ dove $[x]$ indica la parte intera di x.

(b) Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in un intorno di x_0. Dimostrare che se $f = o(g)$ e $g \sim h$ per $x \to x_0$, allora $f = o(h)$ per $x \to x_0$.

(c) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: l'equazione $e^{-2x} = 3x - 2$ ha una e una sola soluzione.

VERO **FALSO**

TEORIA (5 punti)

(a) Enunciare i teoremi del confronto sui limiti che si conoscono e se ne dimostri uno a piacere.

(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $|f(x) - 3x| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e che $f(x) \sim 3x$ per $x \to +\infty$.