COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 11 Febbraio 2008

A

ESERCIZIO 1. (8 punti) Si consideri la funzione $f(x) = 4 + 2x - x^2$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine per $g(x) = e^{f(x)} - 2\sin(e^4 x) - e^4$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \to 0$ (rispetto al compione standard);

(c) dire se $g(x)$ ha segno costante, o se cambia segno, in un intorno del punto $x = 0$;

(d) discutere la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

ESERCIZIO 2. (10 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{7-4|x|}$. Si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) studiare la derivabilità della funzione;

(c) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

(e) dire quali ipotesi del Teorema di Rolle sono soddisfatte da $f(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

ESERCIZIO 3. (5 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = x^2 - 3x + 2$$

(a) Trovare (se esistono) le soluzioni costanti di tale equazione;

(b) risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = x^2 - 3x + 2 \\ x(13) = 5 \end{cases}$

ESERCIZIO 4. (6 punti)

(a) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di 0 tali che $f(x) \sim g(x)$ e $h(x) = o(f(x))$, per $x \to 0$.
Dire se è vero o falso che $f(x) - 5h(x) \sim g(x) + 2h(x)$, per $x \to 0$.
(Se è vero, motivare opportunamente l'affermazione; se è falso, portare un controesempio).

(b) Calcolare le radici cubiche complesse di $8i$.

(c) Provare che la funzione $f(x) = x^{57} + 9x + 2$ ha un unico zero reale.

TEORIA (5 punti)

a) Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

b) Sia $F(x) = \int_0^x (\cos t + 2)e^{-5t^2}\, dt$.
Studiare la monotonia di $F(x)$ e dire se $F(x)$ ha punti di stazionarietà.