

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 10 Settembre 2007

D

ESERCIZIO 1. (6 punti) Si considerino le funzioni $f(x) = 2x \ln(1 - 2x^2)$ e $g(x) = x \sin^2(2x)$.

(a) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per $x \rightarrow 0$;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo della funzione $h(x) = f(x) + g(x)$ per $x \rightarrow 0$;

(c) studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^8 + x^9}} dx$$

ESERCIZIO 2. (11 punti) Si consideri la funzione $f(x) = x\sqrt{1 - 4x^2}$. Si chiede di:

(a) determinare il dominio, il segno, gli zeri ed eventuali simmetrie della funzione $f(x)$, ;

(b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

(d) studiare la derivabilità della funzione $k(x) = |f(x)|$ nel punto $x = 0$.

ESERCIZIO 3. (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{8 + 15e^x}$$

(a) calcolare $\int f(x) dx$ (si consiglia la sostituzione $e^x = t$)

(b) calcolare l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

ESERCIZIO 4. (6 punti)

Provare o confutare le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente le risposte:

(a) la funzione $y(x) = e^x - e^{2x} + xe^x$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = -e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

 VERO FALSO(b) $(2 \sin x - 3 \cos x) \sim (x^3 - 5x^2)$, per $x \rightarrow +\infty$. VERO FALSO(c) le radici cubiche di $-8i$ sono $2i$ e due radici complesse coniugate VERO FALSO

TEORIA (5 punti)

a) Enunciare il teorema di Lagrange.

b) Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $I = [0, 2]$.