

**Esame di ANALISI MATEMATICA I - 10 Febbraio 2007**



**ESERCIZIO 1. (6 punti)** Si consideri la funzione  $f(x) = \sqrt{4 \cos x + x^2} - 2$  (varianti  $\cosh x, -x^2$ ).

(a) determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al quarto ordine per  $f(x)$ ;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di  $f(x)$  per  $x \rightarrow 0$ ;

(c) calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x}$ .

**ESERCIZIO 2. (11 punti)** Si consideri la funzione  $f(x) = x - \ln \frac{x+1}{2x+3}$  (varianti  $-f(x)$ ,  $x \rightarrow -x$ ). Si chiede di:

(a) determinare il dominio di  $f(x)$ , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) determinare gli intervalli di monotonia di  $f(x)$  e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(c) tracciare il grafico di  $f(x)$  utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti.

(d) Calcolare il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

**ESERCIZIO 3. (5 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y(3 - x^4)}{x} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

**ESERCIZIO 4. (6 punti)**

(a) Provare o confutare la seguente affermazione:  $2x^3 \sim 2x^3 + \sin x + 17$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

**VERO**

**FALSO**

(b) Calcolare le radici cubiche di  $-8i$ .

(c) Dire se converge l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{\sin x e^{x^2+3}}{x^{3/2} \cos x} dx$ .

**TEORIA (5 punti)**

a) Enunciare e dimostrare uno, a piacere, dei teoremi del confronto per limiti.

b) Utilizzando il teorema del confronto, calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[ax]}{x}$ , dove  $[x]$  indica la parte intera di  $x$ .