COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 9 Febbraio 2005

A

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \ln(1 + \sin(2x))$.

(a) Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 della funzione $f(x)$;

(b) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x) = e^{f(x)/x} - e^2$, rispetto all'infinitesimo x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\tan x^3}\, \mathrm{d}x\,.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right) \ln \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$, si chiede di:

(a) determinare il dominio, i limiti agli estremi di tale dominio, gli zeri e il segno di $f(x)$;

(b) verificare che la funzione $f(x)$ può essere prolungata per continuità su $\mathbb{R}$ e determinare la funzione $g(x)$ prolungamento continuo di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di $g(x)$;

(d) tracciare il grafico di $g(x)$;

(e) studiare la derivabilità della funzione $g(x)$ nel punto $x = 2$.

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{10}{1 + e^{-5x}} + xe^{2x}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Determinare esplicitamente una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 2$ e $f(x) \sim x^3$ per $x \to +\infty$.

(b) Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases}$. Calcolare la funzione integrale di $f(x)$ che si annulla in $x = -1$.

(c) Provare o confutare la seguente affermazione:

$f(x)$ continua in $[0, 2]$, $x_0 \in (0, 2)$ punto di massimo locale per $f(x)$ allora $f'(x_0) = 0$.

TEORIA (Punti 6)

(1) Enunciare cosa significa, per definizione, che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

(2) Provare o confutare le seguenti affermazioni:

(a) Sia $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ allora esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva.

(b) Se esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva ed esiste il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ allora il valore di tale limite risulta strettamente positvo.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 9 Febbraio 2005

B

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \ln(1 + \sinh(4x))$.

(a) Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 della funzione $f(x)$;

(b) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x) = e^{f(x)/x} - e^4$, rispetto all'infinitesimo x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\tan x^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = \left(\frac{x}{3}+1\right) \ln\left(\frac{x}{3}+1\right)^2$, si chiede di:

(a) determinare il dominio, i limiti agli estremi di tale dominio, gli zeri e il segno di $f(x)$;

(b) verificare che la funzione $f(x)$ può essere prolungata per continuità su $\mathbb{R}$ e determinare la funzione $g(x)$ prolungamento continuo di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di $g(x)$;

(d) tracciare il grafico di $g(x)$;

(e) studiare la derivabilità della funzione $g(x)$ nel punto $x = -3$.

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{12}{1+e^{-4x}} + xe^{3x}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Determinare esplicitamente una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 3$ e $f(x) \sim x^2$ per $x \to +\infty$.

(b) Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ -x-1 & x > -1 \end{cases}$. Calcolare la funzione integrale di $f(x)$ che si annulla in $x = -1$.

(c) Provare o confutare la seguente affermazione:

$f(x)$ continua in $[1, 2]$, $x_0 \in (1, 2)$ punto di minimo locale per $f(x)$ allora $f'(x_0) = 0$.

TEORIA (Punti 6)

(1) Enunciare cosa significa, per definizione, che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

(2) Provare o confutare le seguenti affermazioni:

(a) Sia $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ allora esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva.

(b) Se esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva ed esiste il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ allora il valore di tale limite risulta strettamente positvo.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 9 Febbraio 2005

C

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \ln(1 + \sin(4x))$.

(a) Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 della funzione $f(x)$;

(b) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x) = e^{f(x)/x} - e^4$, rispetto all'infinitesimo x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sin x^3} \, \mathrm{d}x \, .$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 2\right) \ln \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$, si chiede di:

(a) determinare il dominio, i limiti agli estremi di tale dominio, gli zeri e il segno di $f(x)$;

(b) verificare che la funzione $f(x)$ può essere prolungata per continuità su $\mathbb{R}$ e determinare la funzione $g(x)$ prolungamento continuo di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di $g(x)$;

(d) tracciare il grafico di $g(x)$;

(e) studiare la derivabilità della funzione $g(x)$ nel punto $x = 4$.

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{9}{1+e^{-3x}} + xe^{4x}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Determinare esplicitamente una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 3$ e $f(x) \sim x^3$ per $x \to +\infty$.

(b) Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ x+2 & x > -2 \end{cases}$. Calcolare la funzione integrale di $f(x)$ che si annulla in $x = -2$.

(c) Provare o confutare la seguente affermazione:

$f(x)$ continua in $[2, 4]$, $x_0 \in (2, 4)$ punto di massimo locale per $f(x)$ allora $f'(x_0) = 0$.

TEORIA (Punti 6)

(1) Enunciare cosa significa, per definizione, che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$.

(2) Provare o confutare le seguenti affermazioni:

(a) Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ allora esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva.

(b) Se esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva ed esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora il valore di tale limite risulta strettamente positvo.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 9 Febbraio 2005

D

ESERCIZIO 1. (Punti 6) Sia $f(x) = \ln(1 + \sinh(2x))$.

(a) Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 della funzione $f(x)$;

(b) Determinare, per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x) = e^{f(x)/x} - e^2$, rispetto all'infinitesimo x;

(c) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sin x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 10) Data la funzione $f(x) = \left(\frac{x}{3}+2\right)\ln\left(\frac{x}{3}+2\right)^2$, si chiede di:

(a) determinare il dominio, i limiti agli estremi di tale dominio, gli zeri e il segno di $f(x)$;

(b) verificare che la funzione $f(x)$ può essere prolungata per continuità su $\mathbb{R}$ e determinare la funzione $g(x)$ prolungamento continuo di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo locale di $g(x)$;

(d) tracciare il grafico di $g(x)$;

(e) studiare la derivabilità della funzione $g(x)$ nel punto $x = -6$.

ESERCIZIO 3. (Punti 5) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{8}{1+e^{-2x}} + xe^{5x}\, dx$$

ESERCIZIO 4. (Punti 6)

(a) Determinare esplicitamente una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 4$ e $f(x) \sim x^2$ per $x \to +\infty$.

(b) Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ -x-2 & x > -2 \end{cases}$. Calcolare la funzione integrale di $f(x)$ che si annulla in $x = -2$.

(c) Provare o confutare la seguente affermazione:

$f(x)$ continua in $[2, 3]$, $x_0 \in (2, 3)$ punto di minimo locale per $f(x)$ allora $f'(x_0) = 0$.

TEORIA (Punti 6)

(1) Enunciare cosa significa, per definizione, che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

(2) Provare o confutare le seguenti affermazioni:

(a) Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$ allora esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva.

(b) Se esiste un intorno di $+\infty$ in cui la funzione $f(x)$ risulta strettamente positiva ed esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora il valore di tale limite risulta strettamente positvo.