

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 7 Settembre 2009

B

ESERCIZIO 1. (6 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + 4x^3} + \ln(1 + x + x^2) - 1 - x$.

(a) Determinare lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine di $f(x)$;

(b) indicare la parte principale per $x \rightarrow 0$ (rispetto al compione standard) e dire se $f(x)$ ha segno costante, o se cambia segno, in un intorno del punto $x = 0$.

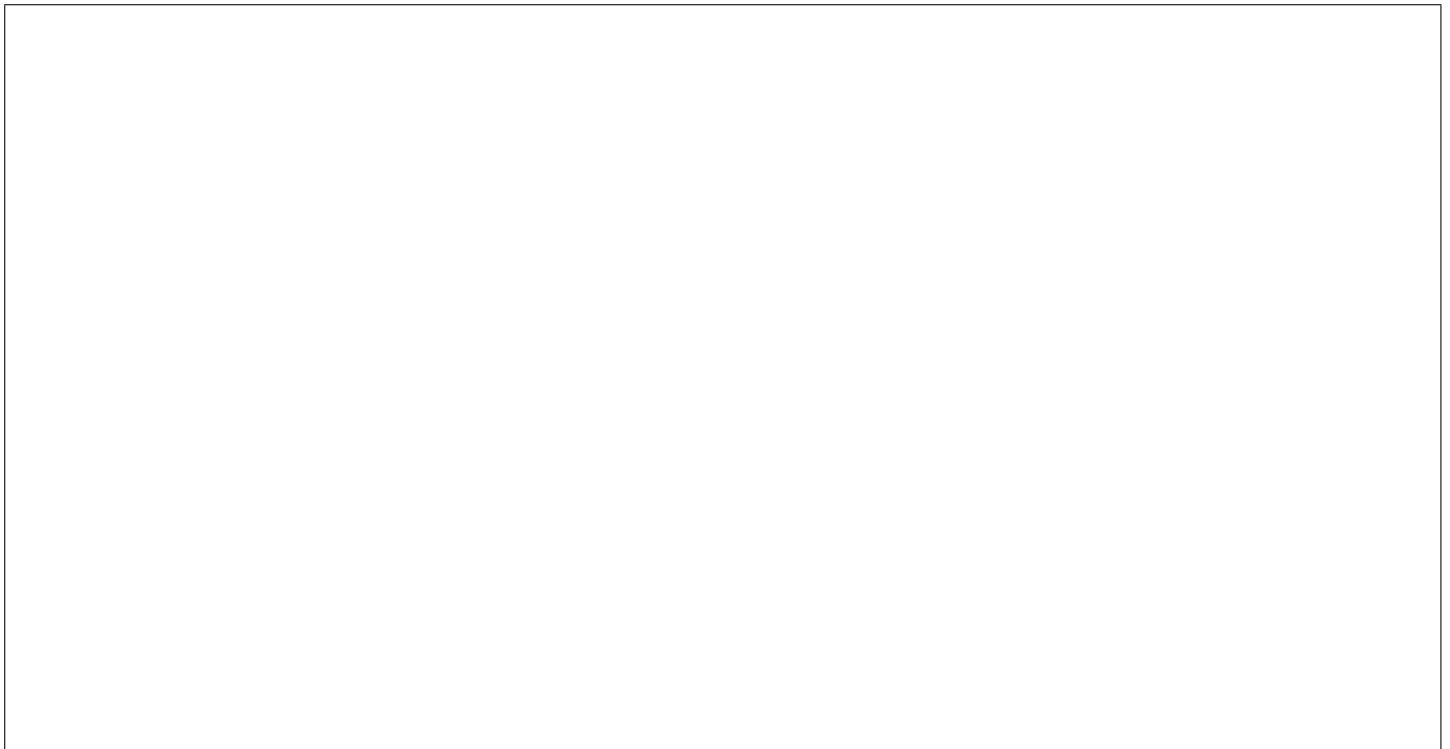
(d) discutere la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3 \sqrt{x}} dx$.

ESERCIZIO 2. (11 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{e^{5x}}{e^x - 4}$. Si chiede di:

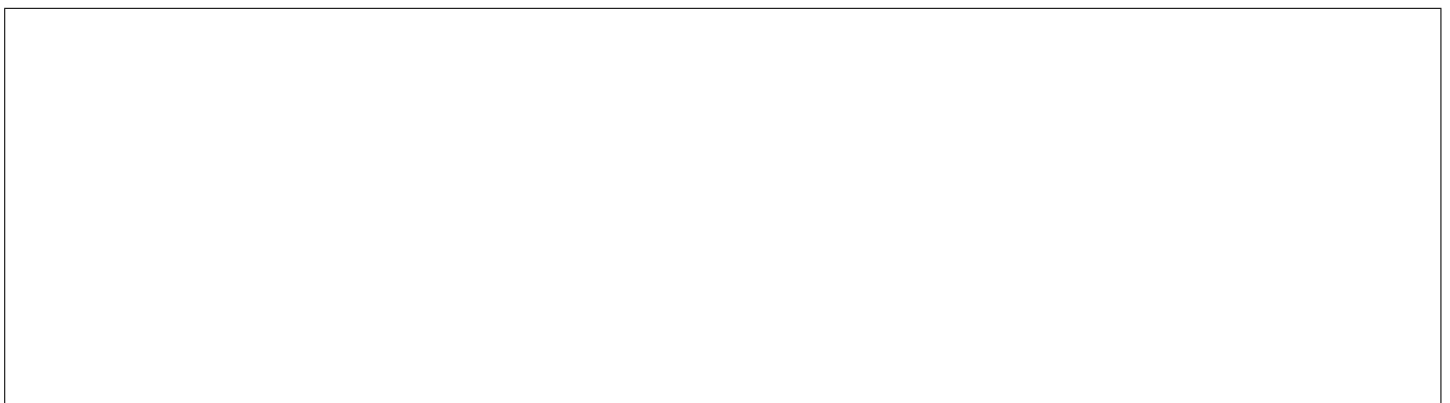
(a) determinare il dominio, studiare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di $f(x)$.



(b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;



(c) tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;



(d) determinare l'insieme immagine di f e dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ ha 2 soluzioni.

ESERCIZIO 3. (6 punti) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln(x+3)$

(a) calcolare l'integrale indefinito $\int f(x) dx$

(b) calcolare l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

ESERCIZIO 4. (6 punti)

(a) Verificare che la funzione $y(x) = 2e^{4x} + \sin 4x$ è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 16y &= -32 \sin 4x \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 12 \end{cases}$$

(b) Determinare l'integrale generale $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' - 16y = -32 \sin 4x$.

(c) Siano $f(x) = \sinh^4(2x) - x^3$ e $g(x) = \ln(1 + 7x^4)$. Allora $f = o(g)$ per $x \rightarrow 0$

 VERO **FALSO**

TEORIA (4 punti)

a) Enunciare il teorema della media integrale.

b) Sia $f(x) = 4 - |x|$; tracciare il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $I = [-2, 2]$ e determinare la media integrale di $f(x)$ nel medesimo intervallo. Come si interpreta geometricamente il risultato ottenuto?