COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 6 Settembre 2005

A

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f(x) = \ln\left(1 + 2x - x^2\right) - 2x\cos x$.

(a) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$;

(c) stabilire la convergenza del seguente integrale improprio: $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x) + 3x^2}{x^4}\,dx$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{1+x^2}}$ si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) determinare l'insieme di continuità e di derivabilità della funzione $f(x)$;

(c) determinare la derivata della funzione $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico di $f(x)$;

(e) determinare l'immagine della funzione $f(x)$.

ESERCIZIO 3. Calcolare $\displaystyle\int \Big[\arctan(x+3) + x\sin(x^2)\Big]\, dx$.

ESERCIZIO 4.

(a) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$ allora $(x+5)f(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$.

VERO **FALSO**

(b) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{3t^2}\,dt$ è una funzione crescente.

VERO **FALSO**

(c) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: le funzioni $F(x) = 2\sin^2 x + 5$ e $G(x) = 1 - \cos 2x$ sono due primitive della stessa funzione.

VERO **FALSO**

TEORIA

(a) Fornire la definizione di funzione continua in un punto;

(b) Fornire la definizione di funzione derivabile in un punto;

(c) Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ e^{x} - 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

stabilirne l'insieme di continuità e di derivabilità.

COGNOME .... NOME .... Matricola .... Corso Prof. ....

Esame di ANALISI MATEMATICA I - 6 Settembre 2005

B

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f(x) = \ln\left(1 - 2x^2 + x\right) - x\cos x$.

(a) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine;

(b) determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$;

(c) stabilire la convergenza del seguente integrale improprio: $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x) + \frac{5}{2}x^2}{x^3\sqrt{x}}\,dx$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ si chiede di:

(a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

(b) determinare l'insieme di continuità e di derivabilità della funzione $f(x)$;

(c) determinare la derivata della funzione $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(d) tracciare il grafico di $f(x)$;

(e) determinare l'immagine della funzione $f(x)$.

ESERCIZIO 3. Calcolare $\displaystyle\int \Big[\arctan(x+5) + x\cos(x^2)\Big]\,dx$.

ESERCIZIO 4.

(a) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: $f(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$ allora $(x-6)f(x) = o(x^5)$ per $x \to 0$.

VERO **FALSO**

(b) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: la funzione integrale $F(x) = \int_0^x e^{-2t^2}\, dt$ è una funzione crescente.

VERO **FALSO**

(c) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: le funzioni $F(x) = 3\sin^2 x - 7$ e $G(x) = 4 - \frac{3}{2}\cos 2x$ sono due primitive della stessa funzione.

VERO **FALSO**

TEORIA

(a) Fornire la definizione di funzione continua in un punto;

(b) Fornire la definizione di funzione derivabile in un punto;

(c) Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 - e^x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

stabilirne l'insieme di continuità e di derivabilità.