Applicazioni lineari

R. Notari

30 Marzo 2006

1. Nucleo ed immagine.

Proposizione 1 *Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare. Allora* $\ker(f)$ *è un sottospazio di V, mentre Im(f) è un sottospazio di W.*

Proposizione 2 *Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare. f è iniettiva se, e solo se,* $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, *ossia se, e solo se,* $\dim \ker(f) = 0$.

Proposizione 3 *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V.*
Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare. Allora

$$\mathit{Im}(f) = \mathcal{L}(f(v_1), \ldots, f(v_n)).$$

In particolare, f è suriettiva se, e solo se, $\dim \mathit{Im}(f) = \dim W$.

2. Teorema del Rango.

Teorema 4 (del Rango) *Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e supponiamo che V sia finitamente generato.*
Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare. Allora abbiamo che

$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathit{Im}(f).$$

Corollario 5 Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$, entrambi di dimensione finita. Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare.

1. Se $\dim V < \dim W$ allora f non può essere suriettiva.

2. Se $\dim V > \dim W$ allora f non può essere iniettiva.

3. Struttura delle controimmagini.

Teorema 6 *Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare. Sia $w \in W$ un vettore. Allora si ha che $f^{-1}(w) \neq \emptyset$ se, e solo se, $w \in$ Im(f). In questo caso, detto $v_0 \in V$ un vettore tale che $f(v_0) = w$, abbiamo che*

$$f^{-1}(w) = \{v_0 + x | x \in \ker(f)\}.$$

Corollario 7 *Sia $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ una matrice, e sia*

$$f : \mathrm{Mat}(n, p; \mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}(m, p; \mathbb{K})$$

l' applicazione lineare definita come

$$f_A(X) = AX.$$

$B \in$ *Im*(f_A) *se, e solo se,* $r(A) = r(A|B)$.

4. Applicazioni lineari e basi.

Teorema 8 *Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e sia V di dimensione finita. Se $B = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V e se $w_1, \ldots, w_n$ sono vettori qualsiasi in W allora esiste una ed una sola applicazione lineare $f : V \to W$ che verifica le condizioni*

$$f(v_i) = w_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corollario 9 *Siano V, W spazi vettoriali della stessa dimensione n sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Allora esiste sempre almeno un isomorfismo tra V e W.*

Corollario 10 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$. Allora V e $\mathbb{K}^n$ sono isomorfi.*

5. Applicazioni lineari e matrici.

Teorema 11 *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e siano $B = (v_1, \ldots, v_n)$ e $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ basi di V e W, rispettivamente. Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare, e sia $M_{B,B'}(f)$ la matrice ad essa associata rispetto alle basi B e B'. Allora abbiamo*

$$[f(v)]_{B'} = M_{B,B'}(f)[v]_B$$

per qualsiasi vettore $v \in V$.

Osservazione 12 *Per come si costruisce la matrice associata all' applicazione lineare $f : V \to W$ fissate le basi B di V e B' di W, segue immediatamente che*

$$\dim \mathit{Im}(f) = r(M_{B,B'}(f))$$

mentre

$$\dim \ker(f) = \dim V - r(M_{B,B'}(f)).$$

6. Composizione di applicazioni lineari.

Proposizione 13 *Siano V, W, Z spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e siano $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ applicazioni lineari. Allora l' applicazione*

$$g \circ f : V \to Z$$

è un' applicazione lineare.

Teorema 14 *Siano V, W, Z spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e siano B, B', B'' basi di V, W, Z, rispettivamente. Allora, si ha*

$$M_{B,B''}(g \circ f) = M_{B',B''}(g) M_{B,B'}(f).$$

Corollario 15 *Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e sia $f : V \to W$ un isomorfismo. Allora* $\dim V = \dim W$ *e, dette B, B' basi di V, W, rispettivamente, si ha*

$$M_{B',B}(f^{-1}) = (M_{B,B'}(f))^{-1}.$$

7. Cambi di base.

Calcolo delle componenti rispetto a basi diverse in V.

Teorema 16 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$, e siano B, C basi di V. Dato un qualsiasi vettore $v \in V$ le sue componenti rispetto a B ed a C sono legate dalla relazione*

$$[v]_C = M_{B,C}(id_V)[v]_B.$$

Calcolo delle matrici associate ad f rispetto a basi diverse.

Teorema 17 *Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e siano B, C basi di V e B', C' basi di W, rispettivamente. Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare. Le matrici $M_{B,B'}(f)$ e $M_{C,C'}(f)$ sono legate dalla seguente relazione*

$$M_{C,C'}(f) = M_{B',C'}(id_W)M_{B,B'}(f)M_{C,B}(id_V).$$