

ESERCIZI SULLE MATRICI

ROBERTO NOTARI

1. ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1.1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

e sia $P \in \text{Mat}(2, 2; \mathbb{R})$ una matrice invertibile. Verificare che $p(P^{-1}AP) = 0$ (matrice nulla di ordine 2) dove $p(x) = x^2 - 8x + 1$. Dedurre da questo che A è una matrice invertibile e calcolarne l'inversa.

Esercizio 1.2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare una formula per calcolare esplicitamente A^n , $n \in \mathbb{N}$. Stabilire se la formula trovata vale anche per $n \in \mathbb{Z}$. Ripetere l'esercizio usando la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.3. Una matrice quadrata è detta *simmetrica* se ${}^tA = A$, è detta *antisimmetrica* se ${}^tA = -A$.

- (1) Verificare che $A + B$ è simmetrica (risp. antisimmetrica) comunque scelte A, B simmetriche (risp. antisimmetriche).
- (2) Verificare che xA è simmetrica (risp. antisimmetrica) per ogni scelta di $x \in \mathbb{K}$ e per ogni scelta di A simmetrica (risp. antisimmetrica).
- (3) Verificare che l' unica matrice sia simmetrica, sia antisimmetrica, è la matrice nulla.
- (4) Verificare che $A + {}^tA$ è simmetrica, mentre $A - {}^tA$ è antisimmetrica, per qualunque scelta di $A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$.
- (5) Verificare che ogni matrice quadrata è somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.
- (6) Verificare infine che $A \cdot {}^tA$ è simmetrica, per qualunque scelta di $A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$.

Esercizio 1.4. Sia $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ un insieme di matrici. Verificare che

- (1) $A + B \in \mathcal{M}, \forall A, B \in \mathcal{M}$.
- (2) $xA \in \mathcal{M}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}$.
- (3) $AB \in \mathcal{M}, \forall A, B \in \mathcal{M}$.

Verificare poi che tutte le matrici non nulle di \mathcal{M} sono invertibili e calcolare la loro inversa. Verificare inoltre che ogni matrice di \mathcal{M} si può scrivere come

$$\rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

per $\mathbb{R} \ni \rho \geq 0$, e $\theta \in \mathbb{R}$.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, POLITECNICO DI TORINO

CORSO DUCA DEGLI ABRUZZI 24, 10129 TORINO - ITALIA

E-mail: roberto.notari@polito.it

Sito web: <http://calvino.polito.it/~notari>