MATRICI

1. Esercizi

Esercizio 1. Siano $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcolare:

$a)2A - B;\ b)3A + 2B - 4C;\ c) - 2A + B + 2C - 2B;\ d)3B + 2(2A - C) - (A + B + 2C).$

Risolvere, se possibile:

(1) $3X + 2(A - X) + B + 2(C + 2X) = 0$;
(2) $4A + 2(B + 2X) - 3(C + X + 2A) = 0$;
(3) $4(A + B + X) + 4(-A - B + X) - 4(A - B + X) = 0$.

Esercizio 2. Calcolare il prodotto delle seguenti coppie di matrici:

$$i) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad ii) \begin{pmatrix} 2 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Siano $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calcolare, quando possibile,

$$i)AC;\ ii)(BC)A;\ iii)B + (CA);\ iv)BA;\ v)B({}^tA);\ vi)3\,{}^tA + BC.$$

Esercizio 4. Calcolare il rango delle seguenti matrici, al variare degli eventuali parametri:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 6. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ due matrici. Allora:

(1) $\det(A) = 0$;
(2) non è possibile effetuare il prodotto AB;
(3) $\rho(A) = 2$;
(4) $AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 7. Il determinante della matrice $\begin{bmatrix} -i & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1+2i \\ 0 & 0 & i & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(1) vale -4;
(2) vale 0;
(3) non si può calcolare;
(4) vale 1.

Esercizio 8. Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, si ha che:

(1) $\det(A) = 0$;
(2) $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;
(3) $A\,{}^tB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$;
(4) $\rho(B) = 1$.

Esercizio 9. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} h & -2 \\ 2 & h \end{bmatrix}$

(1) $\rho(A) = 2$ per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$; (V) (F)
(2) $\rho(A) = 2$ per ogni valore di $h \in \mathbb{C}$; (V) (F)
(3) $\det(A) = -4$ per $h = 0$. (V) (F)

Esercizio 10. Data una matrice quadrata A di ordine 2 qualsiasi, si ha che

(1) $A +{}^tA$ è una matrice simmetrica; (V) (F)
(2) se A ha rango massimo, anche $A +{}^tA$ ha rango massimo; (V) (F)
(3) se $\det(A) = 1$, abbiamo che $\det(2A) = 2$; (V) (F)
(4) se $\det(A) = 1$, abbiamo che $\det(AB) = \det(B)$ per ogni matrice B quadrata di ordine 2. (V) (F)

Esercizio 11. Una matrice quadrata A si dice *nilpotente* se $A^k = 0$ per qualche esponente $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\det(A) = 0$.

Esercizio 12. Una matrice quadrata A si dice *idempotente* se $A^2 = A$. Dimostrare che se $AB = A$ e $BA = B$ allora A e B sono idempotenti.

Esercizio 13. Date le matrici quadrate A e B dello stesso ordine, è vero che $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$?

2. Soluzioni di alcuni esercizi

Soluzione dell' Esercizio 1

$a) 2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

$b) 3A + 2B - 4C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$

$c) - 2A + B + 2C - 2B = -2A - B + 2C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$

$d) 3B + 2(2A - C) - (A + B + 2C) = 3A + 2B - 4C = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$

Usando le proprietà delle operazioni tra matrici, otteniamo che:

(1) $X = \frac{1}{5}(-2A - B - 2C) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

(2) $X = 2A - 2B + 3C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $X = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione dell' Esercizio 2 $i)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = (1)$;

$ii)$ $\begin{pmatrix} 2 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot (-1-i) + (2+i) \cdot 1) = (-i)$.

Soluzione dell' Esercizio 3 Bisogna usare le regole per le operazioni con le matrici.

$i) AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$ii) BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (BC)A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$iii) CA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B + CA = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$iv)$ il prodotto BA non è effettuabile perché il numero di colonne di B è diverso dal numero di righe di A.

$v) B({}^tA) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$vi) BC$ è stata calcolata nel punto $ii)$ di questo esercizio, $3\,{}^tA + BC = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione dell' Esercizio 4 Se scambiamo le colonne della matrice A, otteniamo una matrice ridotta per colonne, e quindi il rango di A è 2. Effettuiamo comunque la riduzione per righe di A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice ottenuta è ridotta per righe.

Riduciamo per righe la matrice B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k - \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \; R_3 \to R_3 - R_2 \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k - \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 3-k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed otteniamo una matrice ridotta per righe. Se $3-k \neq 0$ allora il rango è 3, mentre risulta essere 2 se $3-k=0$. In sintesi

$$\rho(B) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 3 \\ 2 & \text{se } k = 3. \end{cases}$$

Riduciamo per righe la matrice C.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1-k^2 & 0 & 1-k \\ 1-k & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{per } 1-k \neq 0 \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1-k^2 & 0 & 1-k \\ 2-k-k^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e tale matrice risulta essere ridotta per righe se $1-k \neq 0$. Se inoltre $2-k-k^2 \neq 0$, allora il rango di C è 3, mentre, se $1-k \neq 0$, e $2-k-k^2 = 0$ allora il rango di C è 2. Posto poi $k = 1$ nella seconda matrice (ultima che abbiamo potuto scrivere senza imporre la condizione) otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è ridotta per righe e di rango 1. In conclusione si ha:

$$\rho(C) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -2, 1 \\ 2 & \text{se } k = -2 \\ 1 & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Riduciamo per righe la matrice D.

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \\ 1+i & -1+i \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + iR_1 \\ R_3 \to R_3 - (1+i)R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è ridotta per righe, e quindi D ha rango 1.

Soluzione dell' Esercizio 5 Usando la formula, otteniamo che $\det(A) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1$.

Per calcolare il determinante di B usiamo lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga:

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 0 = -3.$$

Per calcolare il determinante di C usiamo lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza colonna:

$$\det(C) = 1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2(2+a) = 3 + 2a.$$

Per calcolare il determinante di D usiamo lo sviluppo di Laplace rispetto alla quarta colonna:

$$\det(D) = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

Era possibile calcolare il determinante di D dopo aver operato sulle sue righe o colonne con operazioni elementari che non cambiano il determinante, al fine di aumentare il numero di zeri tra le entrate di D.

Soluzione dell' Esercizio 6 (1) è falsa perché non è possibile calcolare il determinante di una matrice di tipo 2×3; (2) è falsa perché il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B; (3) è vera perché la matrice A è ridotta per righe e ci sono due righe non nulle; (4) è falsa perché la matrice AB è di tipo 2×2 e quindi non sarà uguale ad una matrice di tipo 2×1.

Soluzione dell' Esercizio 7 Basta osservare che la matrice è triangolare superiore, e che il determinante di una matrice quadrata triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale (dimostrare l' affermazione). Abbiamo quindi che il determinante si può calcolare e vale -4. Ne segue che è vera la (1) e tutte le altre sono false.

Soluzione dell' Esercizio 8 (1) è falsa perché non è possibile calcolare il determinante di una matrice non quadrata; (2) è falsa perché non è possibile effettuare il prodotto tra le matrici A e B; (3) è vera, basta effettuare il prodotto; (4) il rango di B è 2. Basta infatti scambiare le due righe di B per ottenere una matrice ridotta per righe.

Soluzione dell' Esercizio 9 Riducendo la matrice per righe si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} h & 2 \\ 2+\frac{h^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 se $4+h^2 \neq 0$. Abbiamo allora che (1) è vera perché $h^2+4 \neq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, mentre (2) è falsa perché per $h = \pm 2i$ il polinomio $h^2+4=0$ e quindi il rango diventa 1. (3) è falsa perché $\det(A) = 4$ per $h = 0$.

Soluzione dell' Esercizio 10 Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine 2. Allora $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$. Allora (1) è vera. (2) è falsa. Infatti, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango massimo, ma $A + {}^tA$ è la matrice nulla che ha rango 0. (3) è falsa perché $\det(2A) = 4(ad-bc) = 4\det(A)$. (4) è vera per il Teorema di Binet: $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)$.

Soluzione dell' Esercizio 11 Basta usare il Teorema di Binet: $\det(A^k) = (\det(A))^k$. Ma se $A^k = 0$ allora $\det(A^k) = \det(0) = 0$, e quindi $(\det(A))^k = 0$, da cui si ricava che $\det(A) = 0$.

Soluzione dell' Esercizio 12 $A^2 = A \cdot A = (AB)A = A(BA) = AB = A$ e quindi A è idempotente. Il risultato per B si ricava in modo analogo.

Soluzione dell' Esercizio 13 Usando le proprietà delle operazioni di matrici, è facile verificare che $(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2$. Poiché il prodotto di matrici non è commutativo, non possiamo affermare che $-BA + AB = 0$ e quindi in generale l' uguaglianza non vale.