

# TESTI D'ESAME

## PROVA SCRITTA n. 1

**Esercizio 1.** Supponiamo di dover risolvere, avendo a disposizione un algoritmo stabile, un problema numerico mal condizionato con un numero di condizionamento pari a  $10^6$ . Supponiamo che i dati del problema siano affetti dal solo errore di arrotondamento provocato dal calcolatore che utilizziamo. Quale deve essere la precisione di macchina affinché il risultato prodotto dall'algoritmo abbia un errore relativo dell'ordine di  $10^{-3}$ ?

**Risposta.** Ricordiamo preliminarmente che il numero di condizionamento “rappresenta” l'amplificazione che gli errori relativi presenti nei dati del problema subiscono quando determiniamo il risultato, supponendo che tutte le operazioni aritmetiche necessarie per determinare quest'ultimo siano esatte. Poiché l'algoritmo che abbiamo a disposizione è stabile, la sostituzione delle operazioni aritmetiche con quelle di macchina produrrà un errore dell'ordine della precisione di macchina. Pertanto, se l'algoritmo è supposto esatto, ovvero non comporta un errore di approssimazione nella determinazione della soluzione del problema, la perturbazione sul risultato finale ( $10^{-3}$ ) sarà data dal prodotto della perturbazione presente nei dati del problema ( $\varepsilon$ ) per il numero di condizionamento ( $10^6$ ):

$$10^{-3} = \varepsilon * 10^6$$

Da quest'ultima uguaglianza segue che

$$\varepsilon = 10^{-3} * 10^{-6} = 10^{-9}.$$

Occorre quindi che la precisione di macchina sia minore o uguale a  $10^{-9}$ .

**Esercizio 2.** Risolvere con il metodo di Gauss (con pivoting parziale) il seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Risposta.** Esaminando la prima colonna della matrice dei coefficienti scopriamo che il suo secondo elemento (2) è quello di modulo massimo. Occorre scambiare quindi la seconda equazione (riga) con la prima:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Successivamente combiniamo linearmente le righe 2, 3, 4 con la prima (i relativi moltiplicatori compaiono sulla colonna di sinistra), in modo da azzerare la prima colonna:

$$\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nella seconda colonna, partendo dal secondo elemento, l'elemento di modulo massimo è  $\frac{5}{2}$ ; occorre quindi scambiare l'ultima riga con la seconda:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto azzeriamo la seconda colonna:

$$-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{5} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix}.$$

Nella terza colonna, partendo dall'elemento diagonale, l'elemento di modulo massimo è  $-\frac{14}{5}$ ; non effettuiamo scambi e procediamo direttamente alla fase di "azzeramento":

$$-\frac{3}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{13}{7} \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema triangolare superiore finale otteniamo:

$$\begin{aligned} x_4 &= \left(-\frac{13}{7}\right)\left(-\frac{7}{13}\right) = 1 \\ x_3 &= \left(-\frac{4}{5} - 2x_4\right)\left(-\frac{5}{14}\right) = 1 \\ x_2 &= \left(4 - \frac{3}{2}x_3 - 0x_4\right)\left(\frac{2}{5}\right) = 1 \\ x_1 &= \left(0 + x_2 - x_3 + 2x_4\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

**Esercizio 3.** Quali metodi numerici possiamo utilizzare per risolvere un sistema lineare simmetrico definito positivo. Giustificare le possibili scelte.

**Risposta.** Scriviamo il sistema nella forma

$$Ax = b.$$

Quando la matrice  $A$  simmetrica e definita positiva è piena oppure di dimensione piccola conviene utilizzare il metodo di Cholesky, che risolve il sistema in  $n^3/6$  operazioni aritmetiche (anziché  $n^3/3$ ).

Quando invece  $A$  è sparsa e di dimensione non piccola allora possiamo usare il metodo iterativo di Gauss-Seidel (eventualmente accelerato nella forma SOR) oppure il metodo del gradiente coniugato. Poiché  $A$  è simmetrica e definita positiva, la convergenza di questi metodi è assicurata.

**Esercizio 4.** Qual è la differenza tra una generica funzione polinomiale a tratti di grado locale 3 e una spline cubica?

**Risposta.** La spline cubica è una particolare funzione polinomiale a tratti di grado locale 3. Tuttavia, mentre la generica funzione polinomiale a tratti di grado locale 3 è discontinua nei nodi di partizione dell'intervallo di definizione, o al più continua, la spline cubica è continua insieme alle sue derivate di ordine 1 e 2.

**Esercizio 5.** Dovendo calcolare l'integrale

$$\int_0^1 P_3(x) dx$$

dove  $P_3(x)$  denota un polinomio di grado 3, conviene usare la formula di quadratura di Simpson, quella dei trapezi composta oppure la versione composta di Simpson? Giustificare la risposta.

**Risposta.** Osserviamo preliminarmente che le formule composte hanno lo stesso grado di precisione delle formule di base da cui scaturiscono. Pertanto la formula dei trapezi composta ha grado di precisione 2 mentre quella di Simpson ha grado 3. Quindi sia la formula semplice di Simpson che la sua versione composta integrano esattamente qualsiasi polinomio di grado 3. Da ciò segue che conviene utilizzare la formula di Simpson semplice.

**Esercizio 6.** Illustrare la principale differenza esistente tra i metodi one-step e quelli multi-step per la risoluzione di equazioni differenziali con valori iniziali. Costruire un metodo one-step implicito.

**Risposta.** Sia dato il problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Il generico metodo one-step assume la forma

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(f; y_{n+1}, y_n, x_n; h_n)$$

con

$$h_n = x_{n+1} - x_n,$$

ovvero la nuova approssimazione  $y_{n+1}$  viene determinata utilizzando unicamente  $y_n$ .

Invece in un metodo multi-step a  $k$  ( $\geq 2$ ) passi, che vengono supposti costanti,  $y_{n+1}$  viene determinata utilizzando le  $k$  approssimazioni precedenti  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n+1-k}$ . Esso ha la forma

$$y_{n+1} = \Psi(f; y_{n+1}, y_n, \dots, y_{n+1-k}, x_n; h).$$

Come esempio di metodo one-step implicito costruiamo il classico metodo di Eulero (implicito).

Collochiamo dapprima l'equazione differenziale nel nodo  $x_{n+1}$ :

$$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})).$$

Successivamente discretizziamo  $y'(x_{n+1})$  con un rapporto incrementale, ovvero con una differenza divisa del primo ordine:

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$

Abbiamo:

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \approx f(x_{n+1}, y(x_{n+1})).$$

Sostituendo infine il segno  $\approx$  con  $=$ , e quindi  $y(x_k)$  con  $y_k$  otteniamo il metodo:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

cioè

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

**Esercizio 7 (MATLAB).** Introdurre dapprima la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e il vettore

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi risolvere il sistema  $Ax = b$ .

**Risposta.**

```
>>A=[0 2 0 -1
      2 -1 1 -2
      1 0 -2 1
      -1 3 1 1];
>>b=[1
```

```

0
0
4];
>>x=A\b
x =
1
1
1
1

```

**Esercizio 8 (MATLAB).** Introdurre la matrice  $A$  dell'esercizio precedente. Calcolare il rango di  $A$  e, nel caso in cui esso sia 4, l'inversa  $A^{-1}$ . Introdurre infine il vettore  $b$  dell'esercizio precedente e calcolare il vettore  $x = A^{-1}b$ .

**Risposta.**

```

>>A=[0 2 0 -1
2 -1 1 -2
1 0 -2 1
-1 3 1 1];
>>rank(A)
ans =
4
>>B=inv(A);
>>x=B*b
x =
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000

```

## PROVA SCRITTA n. 2

**Esercizio 1.** Supponiamo di operare con un calcolatore con aritmetica floating-point, base  $N = 10$  e  $t = 6$  cifre riservate alla mantissa della rappresentazione di un reale. Sia  $\bar{a} = fl(a)$  e  $\oplus$  la somma di macchina. Volendo calcolare  $c = a + b$ , in quale dei seguenti tre casi si presenta il fenomeno della cancellazione numerica. Giustificare la risposta.

$$(i) \quad \begin{aligned} a &= 0.123456e + 02 \\ b &= -0.123411e + 02 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} a &= 0.1234567213\dots e + 03 \\ b &= -0.1211111111\dots e + 03 \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} a &= 0.1234567213\dots e + 03 \\ b &= -0.1234561111\dots e + 02 \end{aligned}$$

**Risposta.** Osserviamo subito che i casi (i) e (iii) non possono dare origine a fenomeni di cancellazione numerica. Infatti, in (i) i due operandi  $a$  e  $b$  sono numeri di macchina, ovvero  $\bar{a} = a$  e  $\bar{b} = b$ , e la somma esatta  $c$  ha una mantissa con non più di 6 cifre, quindi  $\bar{c} = c$ . In (iii) invece non si ha cancellazione numerica perché i due operandi hanno esponenti diversi. Il caso che genera una perdita di cifre significative è il (ii), in quanto gli esponenti di  $a$  e  $b$  sono uguali, le mantisse hanno più di 6 cifre, le prime due delle quali risultano comuni. Pertanto il risultato di macchina  $\bar{c}$  avrà solo le prime 4 cifre della mantissa corrette.

**Esercizio 2.** Risolvere con il metodo di Gauss (con pivoting parziale) il seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Risposta.** Esaminando la prima colonna della matrice dei coefficienti scopriamo che il suo secondo elemento ( $-2$ ) è quello di modulo massimo. Occorre

scambiare quindi la seconda equazione (riga) con la prima:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Successivamente combiniamo linearmente le righe 2, 3, 4 con la prima (i relativi moltiplicatori compaiono sulla colonna di sinistra), in modo da azzerare la prima colonna:

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nella seconda colonna, partendo dal secondo elemento, l'elemento di modulo massimo è  $\frac{3}{2}$ ; occorre quindi scambiare la terza riga con la seconda:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A questo punto azzeriamo la seconda colonna:

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nella terza colonna, partendo dall'elemento diagonale, l'elemento di modulo massimo è  $\frac{4}{3}$ ; non effettuiamo scambi e procediamo direttamente alla fase di "azzeramento":

$$-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

Risolviendo il sistema triangolare superiore finale otteniamo:

$$\begin{aligned}x_4 &= \left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{4}{7}\right) = 1 \\x_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}x_4\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 1 \\x_2 &= \left(0 + x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \\x_1 &= \left(0 - x_2 - 0x_3 - x_4\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

**Esercizio 3.** Costruire il polinomio di interpolazione (utilizzando la formula di Newton alle differenze divise) associato ai seguenti punti:

$$(1, -1) \quad (0, 1) \quad (-1, 2) \quad (-2, 1)$$

**Risposta.** Osserviamo preliminarmente che per quattro punti del piano, con ascisse distinte, passa uno ed un solo polinomio di grado 3. Quindi, formiamo la tabella delle differenze divise necessaria per costruire il polinomio di interpolazione:

$x_i$	$y_i$			
1	-1			
0	1	$\frac{1-(-1)}{0-1} = -2$		
-1	2	$\frac{2-1}{-1-0} = -1$	$\frac{-1-(-2)}{-1-1} = -\frac{1}{2}$	
-2	1	$\frac{1-2}{-2-(-1)} = 1$	$\frac{1-(-1)}{-2-0} = -1$	$\frac{-1-(-1/2)}{-2-1} = \frac{1}{6}$

Da quest'ultima segue:

$$P_3(x) = -1 - 2(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)(x - 0) + \frac{1}{6}(x - 1)(x - 0)(x + 1).$$

**Esercizio 4.** Criterio dei minimi quadrati: quando si applica e come vengono determinati i coefficienti del modello approssimante? Limitarsi a scrivere l'espressione che definisce il modello, precisando il significato dei simboli presenti.

**Risposta.** Il criterio dei minimi quadrati in genere si applica quando occorre sintetizzare una massa di dati sperimentali con una funzione, ovvero descrivere un fenomeno fisico noto attraverso delle sue misurazioni con un modello matematico. In particolare, assegnati dei punti  $\{(x_i, y_i), i = 0, \dots, m\}$  del piano e scelto un modello matematico (ovvero una funzione approssimante) del tipo:

$$f_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

dove  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$  sono delle funzioni di base scelte, per esempio  $\varphi_k(x) = x^k$ , e  $n < m$  (in genere  $n \ll m$ ), i coefficienti  $c_0, \dots, c_n$  vengono determinati imponendo la condizione di minimo:

$$\sum_{i=0}^m [y_i - f_n(x_i)]^2 = \text{minimo}.$$

**Esercizio 5.** Supponiamo di operare con precisione di calcolo infinita. Qual è la formula di quadratura più semplice ed efficiente per calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^1 P(x) dx,$$

dove  $P(x)$  è un polinomio di grado 3? Giustificare la risposta.

**Risposta.** Poiché la funzione integranda è un polinomio di grado 3, l'integrale può essere calcolato esattamente utilizzando una formula di quadratura che abbia grado di precisione almeno 3. La più semplice delle formule che godono di questa proprietà è quella di Simpson, che ha grado di precisione proprio uguale a 3.

**Esercizio 6.** Proporre un metodo numerico (il più semplice, se volete) per risolvere il problema:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x > 0 \\ y(0) = a \end{cases}$$

E se dovete risolvere, con lo stesso metodo, il problema

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & x > 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b? \end{cases}$$

Quale forma assumerebbe il metodo?

**Risposta.** Il metodo numerico più semplice è certamente quello di Eulero (esplicito):

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Dovendo poi applicare questo metodo al problema del secondo ordine, dobbiamo preliminarmente trasformare quest'ultimo in un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine. A tal fine poniamo

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \end{aligned}$$

e quindi scriviamo:

$$\begin{cases} z_1'(x) = z_2(x), & z_1(0) = a \\ z_2'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x)) & z_2(0) = b. \end{cases}$$

Applichiamo infine il metodo di Eulero a questo sistema:

$$\begin{cases} z_{1,n+1} = z_{1,n} + h z_{2,n}, & z_{1,0} = a \\ z_{2,n+1} = z_{2,n} + hf(x_n, z_{1,n}, z_{2,n}) & z_{2,0} = b. \end{cases}$$

**Esercizio 7 (MATLAB).** Risolvere l'esercizio 2, ovvero introdurre i dati e stampare in formato long e la soluzione del sistema.

**Risposta.**

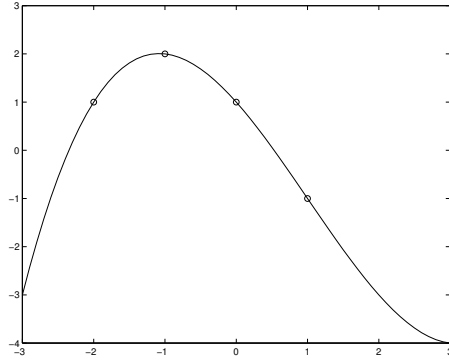
```
>>A=[1 0 1 -1;-2 1 0 1;-1 2 -1 0;0 -1 1 2];
>>b=[1;0;0;2];
>>format long e
>>x=A\b
x =
    1.0000000000000000e+000
    1.0000000000000000e+000
    1.0000000000000000e+000
    1.0000000000000000e+000
```

**Esercizio 8 (MATLAB).** Risolvere l'esercizio 3, ovvero introdurre i dati e disegnare il polinomio di interpolazione.

**Risposta.**

```
>>x=[1 0 -1 -2];
```

Figura 1: Polinomio interpolante i dati dell'esercizio 3



```
>>y=[-1 1 2 1];  
>>c=polyfit(x,y,3);  
>>z=[-3:.1:3];  
>>p=polyval(c,z);  
>>plot(x,y,'o',z,p);
```

### PROVA SCRITTA n. 3

**Esercizio 1.** Sia dato un problema numerico  $y = f(x)$  e supponiamo di poter valutare la soluzione  $y$  con una precisione di calcolo infinita (ovvero con aritmetica esatta). Introducendo il dato  $x = 0.1$  troviamo  $y = 1.518724$ , mentre a  $\bar{x} = 0.10001$  corrisponde il risultato  $\bar{y} = 1.621000$ . Che cosa possiamo concludere?

**Risposta.** Osserviamo che ad un errore relativo sul dato  $\bar{x}$  pari a

$$\epsilon_x = \left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| = \frac{10^{-5}}{0.1} = 10^{-4}$$

corrisponde, in aritmetica esatta, un errore sul risultato  $\bar{y}$  uguale a

$$\epsilon_y = \left| \frac{y - \bar{y}}{y} \right| = \frac{1.621000 - 1.518724}{1.518724} = 6.73 * 10^{-2}.$$

Abbiamo pertanto un'amplificazione dell'errore, dovuta unicamente alla presenza di  $\epsilon_x$ , pari a

$$K = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{6.73 * 10^{-2}}{10^{-4}} = 6.73 * 10^2.$$

Il problema si presenta quindi (moderatamente) mal condizionato.

**Esercizio 2.** Trovare la formula risolutiva per un sistema lineare (non singolare) di forma triangolare inferiore  $Ax = b$ . Scrivere quindi un algoritmo che letti la matrice  $A$  e il termine noto  $b$ , determini la corrispondente soluzione  $x$ .

**Risposta.** Scriviamo il generico sistema di forma triangolare inferiore, che supponiamo non singolare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

con  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Dalla prima equazione ricaviamo  $x_1$ :

$$x_1 = b_1/a_{11},$$

dalla seconda  $x_2$ :

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22},$$

e così via. Dall'ultima ricaviamo  $x_n$ :

$$x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn}.$$

Più in generale data l' $i$ -esima equazione:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i = b_i$$

ricaviamo  $x_i$ :

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j)/a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n,$$

ove quando  $i = 0$  il simbolo  $\sum_{i=1}^0$  indica la sommatoria vuota. L'algoritmo finale assume quindi la forma:

1. Input:  $A, b$
2. Output:  $x$
3.  $x_1 = b_1/a_{11}$
4. Ciclo 1:  $i = 2, \dots, n$
5.  $x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j)/a_{ii}$
6. fine Ciclo 1
7. *End*

**Esercizio 3.** Di quali proprietà gode la generica spline cubica?

**Risposta.** Sia dato un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  e una sua partizione  $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n \equiv b$ . La generica spline cubica  $S_3(x)$  associata a tale partizione è un polinomio di grado 3 in ciascun sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , ed è inoltre continua in  $[a, b]$  insieme alle sue prime due derivate. Ovvero essa è una particolare funzione polinomiale a tratti di grado locale 3, di classe  $C^2[a, b]$ .

**Esercizio 4.** Si vuole calcolare la radice quadrata  $x = \sqrt{a}$  di un numero positivo  $a$ , utilizzando le sole operazioni aritmetiche. Trasformare il problema

in un'equazione e quindi applicare un metodo risolutivo efficiente (scrivere esplicitamente la formula risolutiva e proporre un'approssimazione iniziale).

**Risposta.** Il numero  $x = \sqrt{a}$  coincide con la radice positiva dell'equazione (di secondo grado)

$$x^2 - a = 0.$$

Il metodo più efficiente per calcolare tale radice è quello di Newton-Raphson, o delle tangenti:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

che in questo caso, posto

$$f(x) = x^2 - a,$$

assume la forma più semplice

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right], \quad n = 0, 1, \dots$$

Come approssimazione iniziale possiamo prendere un qualsiasi reale  $x_0 > 0$ ; per esempio  $x_0 = 1$ .

**Esercizio 5.** Ricavare il metodo di Eulero esplicito e applicarlo al problema

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & x > 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

Scrivere la forma che il metodo assume in questo caso.

**Risposta.** Il metodo di Eulero esplicito per il problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x > 0 \\ y(0) = a \end{cases}$$

assume la forma

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Un modo semplice per ricavare tale metodo consiste nel collocare l'equazione differenziale nel nodo  $x = x_n$  e quindi nell'approssimare la derivata  $y'(x_n)$  con il rapporto incrementale  $\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$ ,  $h = x_{n+1} - x_n$ :

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)).$$

Sostituendo in quest'ultima espressione  $\approx$  con  $=$  e ponendo  $y_n$  al posto di  $y(x_n)$  si ottiene il metodo di Eulero.

Volendo applicare il metodo di Eulero al problema del secondo ordine, dobbiamo preliminarmente trasformare quest'ultimo in un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine. A tal fine poniamo

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \end{aligned}$$

e quindi scriviamo:

$$\begin{cases} z_1'(x) = z_2(x), & z_1(0) = a \\ z_2'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x)) & z_2(0) = b. \end{cases}$$

Applichiamo infine il metodo di Eulero a questo sistema:

$$\begin{cases} z_{1,n+1} = z_{1,n} + h z_{2,n}, & z_{1,0} = a \\ z_{2,n+1} = z_{2,n} + h f(x_n, z_{1,n}, z_{2,n}) & z_{2,0} = b. \end{cases}$$

**Esercizio 6 (MATLAB).** Introdurre la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e stampare  $A^{-1}$ . Calcolare poi  $B = (A^T)^{-1}$  e stampare sia  $A^T$  che  $B$ . Che cosa osserviamo nei due casi?

Poiché avevamo già determinato  $A^{-1}$ , nel secondo caso era proprio necessario calcolare l'inversa di  $A^T$ ?

Infine, formare la matrice  $C = A * A^T$  e determinare gli autovalori di  $C$ .

**Risposta.**

```
>>A=[1 0 0
1 2 0
1 2 3];
>>inv(A)
ans =
    1.0000         0         0
   -0.5000    0.5000         0
         0   -0.3333    0.3333
```

```

>>A'
ans =
     1     1     1
     0     2     2
     0     0     3
>>B=inv(A')
B =
     1.0000    -0.5000         0
         0     0.5000    -0.3333
         0         0     0.3333

```

Osserviamo che l'inversa di una matrice triangolare inferiore (superiore) è ancora una matrice triangolare inferiore (superiore). Osserviamo inoltre che  $B$  coincide con la trasposta di  $A^{-1}$ . In effetti, poiché le operazioni di inversione e trasposizione di una matrice si possono scambiare tra di loro ( $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ) non era necessario calcolare l'inversa di  $A^T$ , ma bastava semplicemente calcolare la trasposta di  $A^{-1}$ .

Infine, abbiamo

```

>>C=A*A'
ans =
     1     1     1
     1     5     5
     1     5    14
>>eig(C)
ans =
     0.7598
     2.8996
    16.3406

```