Nome e COGNOME................................ Matricola............

MATEMATICA III

23 maggio 2001

Esercizio 1

Determinare e classificare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x.$$

Soluzione:

Ricerca dei punti critici: $\nabla f = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 1 & = 0 \\ \\ 2y + x & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & = -\frac{2}{3} \\ \\ y & = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Classificazione dei punti critici:

$$H_{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)} f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det H_{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)} f = 3 > 0$, $f_{x,x} = 2 > 0 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ punto di minimo.

Esercizio 2

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(t^2+1)x' + x^2 = 0;$$

b) trovare la soluzione particolare tale che $x'(0) = -1$.

Soluzione:

a) Le soluzioni dell'equazione sono:

1.

$$x(t) = 0$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\frac{x^2}{t^2+1}, \\
-\frac{\mathrm{d}x}{x^2} &= \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t, \\
\frac{1}{x} &= \arctan(t) + c, \\
x &= \frac{1}{\arctan(t)+c}.
\end{aligned}$$

b) La soluzione 1 non può soddisfare la condizione richiesta. Calcoliamo i valori di c

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\frac{1}{t^2+1}}{(\arctan(t)+c)^2}, \\
\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= -\frac{1}{c^2} = -1.
\end{aligned}$$

Il valore della costante che soddisfa la condizione richiesta è $c = \pm 1$. A questi due valori per c corrispondono due soluzioni su intervalli diversi:

2.a

$$x = \frac{1}{\arctan(t)+1}$$

il cui dominio è $(-\infty, -\tan(1)) \cap (-\tan(1) + \infty)$ e quindi può essere soluzione del problema che soddisfa la condizione richiesta sull'intervallo $(-\tan(1), \infty)$ che contiene il punto 0.

2.b

$$x = \frac{1}{\arctan(t)-1}$$

il cui dominio è $(-\infty, \tan(1)) \cap (\tan(1) + \infty)$ e quindi può essere soluzione del problema che soddisfa la condizione richiesta sull'intervallo $(-\infty, \tan(1))$.

Esercizio 3

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x\mathrm{e}^y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove

$$A = \{(x, y) \, : \, 0 \le x \le 1, \, x^2 \le y \le x\} \, .$$

Soluzione:

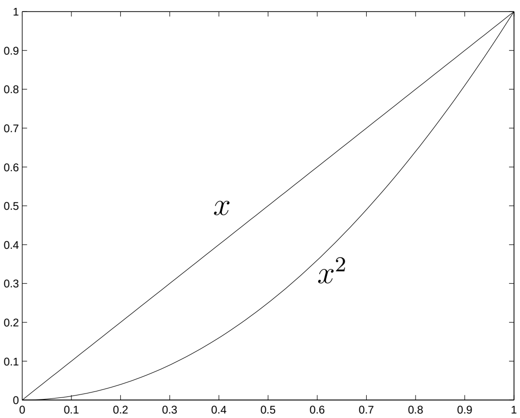

Figure 1: Dominio di integrazione

$$\int_A x\mathrm{e}^y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x \int_{x^2}^x \mathrm{e}^y \, \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x = \int_0^1 x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2})\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1.$$

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \left.\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\right|_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$\int_A x\mathrm{e}^y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Esercizio 4
Scelte 5 carte da un mazzo di 13 dello stesso seme (1,..,10,F,D,R), valutare la probabilità di avere estratto 2 figure.

A $\binom{2}{2}\binom{13}{1}/\binom{13}{2}$

B $\binom{3}{2}\binom{10}{3}/\binom{13}{5}$

C $\binom{3}{2}\binom{13}{3}/\binom{13}{5}$

D $\binom{5}{2}/\binom{13}{5}$

Soluzione:
B: il numero di modi di scegliere una figura tra le tre presenti nel mazzo è $\binom{3}{2}$, il numero di modi di scegliere le restanti tre carte tra le 10 carte del mazzo che non sono figure è $\binom{10}{3}$. Il numero di casi favorevoli è quindi $\binom{3}{2}\binom{10}{3}$. Il numero di casi possibili invece è $\binom{13}{5}$.

Esercizio 5
Si è misurata il tempo medio di vita di un dispositivo, ottenendo le seguenti quantità:$10000h$, $11000h$, $15000h$ e $8000h$. Calcolare il valore atteso E e la varianza Var della misura, supponendo che il risultato della misura sia una variabile aleatoria discreta con densità uniforme.

A $E = 11000h$, $Var = 6500000h^2$

B $E = 14000h$, $Var = 8.6667e + 06h^2$

C $E = 12000$, $Var = 11000h$

D $E = 10500h$, $Var = 2.5495e + 03h$

Soluzione:
a:

$$E = \frac{10000h + 11000h + 15000h + 8000h}{4} = 11000h.$$

$$Var = \frac{(10000-11000)^2+(11000-11000)^2+(15000-11000)^2+(8000-11000)^2}{4}h^2 = 6500000h^2.$$

Oppure

$$Var = \frac{10000^2 + 11000^2 + 15000^2 + 8000^2}{4}h^2 - 11000^2h^2 = 127500000h^2 - 121000000h^2 = 6500000h^2.$$

Esercizio 6
Si consideri una variabile casuale gaussiana x con valore medio $\mu = 3$ e deviazione standard $\sigma = 5$. Calcolare la probabilità che X assuma un valore compreso tra 4 e 7.

Soluzione:

$$P(4 \le x \le 7) = \Phi\left(\frac{7-3}{5}\right) - \Phi\left(\frac{4-3}{5}\right) = \Phi(0.8) - \Phi(0.2) = 0.7881 - 0.5793 = 0.2088.$$