

MATEMATICA III

Luglio 2002

Esercizio 1

Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = ye^{-(x^2+y^2)}$$

e discuterne il tipo.

*Soluzione:*Ricerca dei punti critici: $\nabla f = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2xye^{-(x^2+y^2)} = 0, \\ (1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 1-2y^2 = 0. \end{cases}$$

Si noti che la soluzione $y = 0$ della prima equazione non è ammissibile per la seconda equazione. I punti critici quindi risultano:

$$P_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Classificazione dei punti critici: per prima cosa si calcolano le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{x,x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2y + 4x^2y) e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{x,y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (-6y + 4y^3) e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{y,y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = (-2x + 4xy^2) e^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Consideriamo dapprima il punto P_1 :

$$H_{P_1} f = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}e^{-1/2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}e^{-1/2} \end{bmatrix}$$

$\det H_{P_1} f = 4e^{-1} > 0$, $f_{x,x} < 0 \Rightarrow P_1$ punto di massimo. In alternativa si può notare che la matrice hessiana in P_1 ha entrambe gli autovalori negativi giungendo alla stessa conclusione.

Consideriamo ora il punto P_2 :

$$H_{P_2} f = \begin{bmatrix} \sqrt{2}e^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}e^{-1/2} \end{bmatrix}$$

$\det H_{P_2} f = 4e^{-1} > 0$, $f_{x,x} > 0 \Rightarrow P_2$ punto di minimo. In alternativa si può notare che la matrice hessiana in P_2 ha entrambe gli autovalori positivi.

Esercizio 2

Sia T il triangolo di vertici $A = (0, 2)$, $B = (1, 2)$ e $C = (1, 0)$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_T (x + y) dx dy.$$

Soluzione:

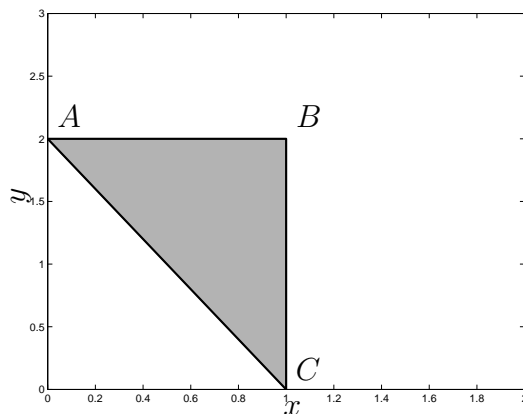


Figure 1: Dominio di integrazione

Il dominio è sia orizzontalmente convesso (x-sempllice) che verticalmente convesso (y-sempllice). Integriamo per orizzontali. La retta \overline{AC} ha equazione $y = 2 - 2x$, cioè $x = 1 - \frac{1}{2}y$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_{1-\frac{1}{2}y}^1 (x + y) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}y \right)^2 + y - y \left(1 - \frac{1}{2}y \right) \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 \right) dy \\ &= 2. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Determinare per $x > 0$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{xy + 1}{x^2}.$$

Soluzione:

Scriviamo l'equazione nella forma seguente:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}.$$

$$a(x) = -\frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$A(x) = \int a(s)ds = -\log(x).$$

$$\begin{aligned} y(x) &= ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} f(x) dx \\ &= ce^{\log(x)} + e^{\log(x)} \cdot \int e^{-\log(x)} \frac{1}{x^2} dx \\ &= cx + x \cdot \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= cx + x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \\ &= cx - \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Si lanci una moneta 10 volte; quale è la probabilità di ottenere testa almeno 8 volte?

- A $\left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- B $\binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- C $\sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
- D $\left(\frac{1}{2}\right)^8$

Soluzione:

C: La soluzione è fornita dalla formula di Bernoulli. Consideriamo successo l'uscita di "testa" con probabilità $1/2$ e insuccesso l'uscita di "croce" con probabilità $1/2$. La probabilità di ottenere successo almeno 8 volte è la probabilità di ottenerlo esattamente 8 volte più quella di ottenerlo 9 volte, più quella di ottenerlo 10 volte:

$$\sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}.$$

Esercizio 5

Ammettiamo di disporre di un test per la diagnosi precoce di un certo tipo di tumore, capace di fornire una diagnosi corretta nel 95% dei casi di persone ammalate (supponiamo che $P(\text{test positivo} \mid \text{persona sana}) = 0$). Se l'incidenza di quel tipo di cancro è pari allo 0.5% sulla popolazione esaminata, qual' è la proporzione di diagnosi corrette di malattia?

Soluzione:

Siano C_1 l'evento "paziente malato" con $P(C_1) = 0.005$ (0.5%) e C_2 l'evento "paziente sano" con $P(C_2) = 1 - P(C_1) = 0.995$. Siano inoltre T_1 l'evento "risultato del test negativo" (il test dice che non v'è malattia) e T_2 l'evento "risultato del test positivo". Il testo dice che nel 95% dei casi di persone malate il test fornisce un risultato corretto, cioè $P(T_1|C_1) = 0.95$ è la probabilità che il test fornisca esito positivo quando (probabilità condizionata) eseguito su persona ammalata. Inoltre il testo dice che $P(T_1|C_2) = 0.0$. La diagnosi eseguita dal test è corretta quando:

- il test è positivo e la persona è ammalata: $P(T_1|C_1) \cdot P(C_1)$;
- il test è negativo e la persona è sana: $P(T_2|C_2) \cdot P(C_2)$.

$$\begin{aligned} P(\text{diagnosi corretta}) &= P(T_1|C_1) \cdot P(C_1) + P(T_2|C_2) \cdot P(C_2) = \\ &= 0.95 * 0.005 + 1.0 * 0.995 = 0.99975. \end{aligned}$$

Si noti che $P(T_2|C_2) = 1 - P(T_1|C_2) = 1.0 - 0.0 = 1.0$.

Esercizio 6

Una ditta produce componenti che possono presentare due differenti tipi di difetti, con percentuali del 4% e 9% rispettivamente. Assumendo che le presenze di difetti del primo e del secondo tipo siano tra loro indipendenti, si calcoli:

1. la probabilità che un componente presenti entrambi i difetti;
2. la probabilità che un componente sia difettoso;
3. la probabilità che un componente presenti un difetto del primo tipo, sapendo che esso è difettoso.

Soluzione:

Siano D_1 l'evento "il componente presenta il difetto 1" con $P(D_1) = 0.04$ e D_2 l'evento "il componente presenta il difetto 2" con $P(D_2) = 0.09$.

1. $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2) = 0.04 * 0.09 = 0.0036$ (difetti indipendenti).
2. $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0.04 + 0.09 - 0.0036 = 0.1264$.
3. $P(D_1 | D_1 \cup D_2) = P(D_1 | D)$, $D = D_1 \cup D_2$: applicando la formula di Bayes abbiamo

$$P(D_1 | D) = \frac{P(D | D_1) \cdot P(D_1)}{P(D)} = \frac{1.0 * 0.04}{0.1264} = 0.3165.$$

Si noti un componente è sicuramente guasto se presenta il guasto di tipo 1 $P(D | D_1) = 1.0$.